

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFFER
WIEN WIEN WIEN
L. SCHMETTERER
WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG
N. HOFREITER
WIEN

65. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

MIT 11 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM OKTOBER 1961)



WIEN
SPRINGER-VERLAG

1961

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I, Mülkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

65. Band./4. Heft

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Brauner, H. Eine einheitliche Erzeugung konstant gedallter Strahlflächen	301
Bukovics, E. Eine Bemerkung zur Methode von D. A. Baschkirow für die numerisch-graphische Lösung von Differentialgleichungen	315
Hofmann, L. Die Stellung der projektiven Geometrie im relativistischen Weltbild	323
Krames, J. Über windschiefe Flächen mit konischer Zentraltorse	337
Rybarz, J. Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung . .	351
Ströher, W. Zur Kinematik der flächentreuen Affinitäten mit fixem Ursprung	358
Strubecker, K. Beitrag zur kinematischen Abbildung	366
Buchbesprechungen	391

Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrahter Strahlflächen

Von

H. Brauner, Stuttgart

Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. E. Kruppa zum 75. Geburtstag gewidmet

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 3. November 1960)

1. Unter einer Strahlfläche wird im folgenden eine stetige einparametrische Geradenmannigfaltigkeit im projektiven dreidimensionalen Raum verstanden. Sind e und e_1 zwei Erzeugenden der Strahlfläche Φ , a ihr Abstand und φ ihr Winkel, so bezeichnet man als „Drall“ d von Φ längs e den Grenzwert

$$d = \lim_{e_1 \rightarrow e} a : \varphi, \quad (1)$$

falls e_1 auf Φ gegen e konvergiert. d ist ein Maß für die Verwindung des im allgemeinen windschiefen Streifens von Φ längs e . Dieser Begriff wurde von *M. Chasles* eingeführt¹. Der Fußpunkt $\bar{S}$ des Gemeinlotes von e und e_1 auf e durchläuft bei obigem Grenzübergang eine Lagenfolge auf e mit einem im allgemeinen wohl bestimmten Grenzpunkt S auf e , den man „Striktionspunkt (Zentralpunkt)“ von e nennt. Ebenso erreicht die zu e_1 parallele Ebene $\bar{\alpha}$ durch e bei Ausführung des Grenzüberganges im allgemeinen eine bestimmte Grenzlage α , die „asymptotische Ebene“ von e heißt, weil sie Φ im Fernpunkt von e berührt.

Strahlflächen, deren Drall identisch gleich Null oder Unendlich ist, sind als Tangentenflächen von Raumkurven, Kegel bzw. Zylinder hinlänglich bekannt. Mit den Flächen, deren Drall konstant aber von Null oder Unendlich verschieden ist, habe ich mich in einer Reihe von

¹ Außer der Bezeichnung „Drall“, die von *W. Blaschke* (1921) stammt, sind für die Größe d — bzw. ihren Kehrwert — noch die Namen „Verteilungsparameter“ (*M. Chasles*, 1839) und „Schränkung“ (*F. Buka*, 1881) gebräuchlich.

Arbeiten beschäftigt [2]—[6]. Im Rahmen dieser auf Anregung von J. Krames begonnenen Untersuchungen soll in dieser Mitteilung eine *einheitliche Erzeugungsart* solcher Flächen angegeben werden; außerdem wird auf affingometrische Eigenschaften eingegangen sowie eine Reihe von zum Teil noch nicht bekannten Beispielen vorgeführt. Der folgenden analytischen Behandlung liegt eine natürliche Geometrie der Strahlflächen zugrunde unter Verwendung jenes Kalküls, der von E. Kruppa [13] entwickelt wurde².

2. Wir verwenden die von den Striktionspunkten S auf Φ erfüllte Kurve s als Leitkurve von Φ und denken uns diese (als nicht isotrop vorausgesetzte) Striktionslinie s unter Verwendung kartesischer Koordinaten $x = x_1 : x_0$, $y = x_2 : x_0$, $z = x_3 : x_0$ gegeben durch ihren Ortsvektor $\tilde{s} = \tilde{s}(u)$ als Funktion ihrer Bogenlänge u . Stellt $e(u)$ einen Einsvektor in Richtung der Erzeugenden von Φ dar, so besitzt Φ unter Verwendung eines weiteren Parameters v die Darstellung

$$\chi(u, v) = \tilde{s}(u) + v e(u). \quad (2)$$

Nach E. Kruppa verknüpfen wir mit jeder Erzeugenden von Φ ein im Striktionspunkt angreifendes orthonormiertes Rechtsdreiein, das von den Vektoren

$$e, n = \frac{e'}{|e'|}, \quad \mathfrak{z} = \frac{e \times e'}{|e'|} \quad (3)$$

gebildet wird, wobei der Akzent die Ableitung nach u bedeutet. $n(u)$ stellt dabei einen Normalenvektor von Φ in S dar („Zentralnormalenvektor“) und $\mathfrak{z}(u)$ einen Normalenvektor der asymptotischen Ebenen α von Φ („Zentraltangentialvektor“)³. Die Ableitungsgleichungen dieses „begleitenden Dreieins“ von Φ sind formal wie die Frenetschen Formeln der Kurventheorie gebaut und lauten

$$e' = \kappa n, \quad n' = -\kappa e + \tau \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z}' = -\tau n; \quad (4)$$

als Koeffizienten treten die „Krümmung“ $\kappa(u)$ und die „Torsion“ $\tau(u)$ von Φ auf. Bezeichnet man den Winkel zwischen den Erzeugenden von Φ und der Striktionslinie s als „Striktion“ $\sigma(u)$ von Φ , so gilt für den Tangentenvektor von s

$$\tilde{s}' = e \cos \sigma + \mathfrak{z} \sin \sigma. \quad (5)$$

² Eine lehrbuchartige Darstellung findet sich in [14].

³ Das in S tangential zur Fläche liegende Zweiein $\{e, \mathfrak{z}\}$ wird von F. Löbell [16] als „Begleitkörper“ von Φ bezeichnet.

Die drei Funktionen κ , τ , σ bestimmen die Strahlfläche bis auf Bewegungen im Raum eindeutig. Für ihren Drall errechnet man nach (1)

$$d = \frac{\sin \sigma}{\kappa} \quad (6)$$

und dieser Wert ist somit konstant, falls

$$\kappa \sigma' \cos \sigma - \kappa' \sin \sigma = 0 \quad (7)$$

gilt.

3. Die krummlinigen Schmieglinien $v = v(u)$ von Φ genügen einer Riccatischen Differentialgleichung mit der Bauart

$$F(\kappa, \tau, \sigma, \kappa', \sigma'; v, v') = 0. \quad (8)$$

Durch jeden Punkt einer herausgegriffenen Erzeugenden e geht im allgemeinen eine solche Schmieglinie, deren Tangenten die Richtung

$$\xi_u + \xi_v v' = e(\cos \sigma + v') + n\kappa v + \mathfrak{z} \sin \sigma \quad (9)$$

besitzen, wobei v' aus (8) zu nehmen ist. Alle diese Tangenten längs e erfüllen eine Strahlfläche zweiten Grades, das „oskulierende Hyperboloid“ Ω von e , das mit den $Lie - F_2$ von Φ in sämtlichen Punkten von e zusammenfällt (vgl. [17, S. 76 ff.]). Legt man das Dreibein $\{e, n, \mathfrak{z}\}$ von e in die x -, y - bzw. z -Achse des Koordinatensystems, so erhält man als Gleichung von Ω :

$$\begin{aligned} & \kappa \tau \sin \sigma \left(y^2 + z^2 - 2 x z \frac{\kappa}{\tau} + z^2 \frac{\kappa}{\tau} \operatorname{ctg} \sigma \right) + \\ & + (\kappa \sigma' \cos \sigma - \kappa' \sin \sigma) y z + 2 y \kappa \sin^2 \sigma = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Für die Mitte M von Ω errechnet man aus (10) die Koordinaten⁴

$$M \left(\frac{\kappa' \sin \sigma - \kappa \sigma' \cos \sigma}{2 \kappa^2 \tau}, -\frac{d}{\kappa_2}, 0 \right), \quad (11)$$

wobei $\kappa_2 = \tau : \kappa$ die „konische Krümmung“ von Φ bedeutet. Speziell bei konstantem Drall folgt für die Koordinaten von M wegen (7): $M(0, -d : \kappa_2, 0)$; M liegt somit auf der Zentralnormalen und da Ω die Fläche Φ in S berührt, ergibt sich:

Besitzt eine Strahlfläche konstanten Drall, so sind ihre Striktionspunkte Scheitel der oskulierenden Hyperboloide⁵.

⁴ Die Koordinaten des Mittelpunktes der $Lie - F_2$ finden sich schon bei W. Haack [9, S. 79].

⁵ Speziell für den Sonderfall der Strahlschraubflächen, die wegen der Existenz einer Bewegung in sich konstant gedraht sind, wurde diese Tatsache schon von H. Schaal [19, S. 156] hergeleitet.

Dieser Satz gilt auch für jene Erzeugenden einer beliebigen Strahlfläche, deren Drall einen stationären Wert besitzt.

Der Punkt M spielt in der affinen Differentialgeometrie der Strahlflächen eine gewisse Rolle, und zwar stellt dieser Punkt die „*affine Krümmungsmitte*“ von e dar; durch ihn gehen nach *J. Radon* [18] die Affinnormalen sämtlicher Punkte von e . Ω ist durch drei konsequente Erzeugenden von Φ bestimmt und die Mitte M von Ω liegt stets auf der Schnittgeraden zweier konsekutiver asymptotischer Ebenen von Ω und somit von Φ . Durch M geht daher stets die Erzeugende a der von den asymptotischen Ebenen α von Φ umhüllten Torse (vgl. [1, S. 227]). Die Ortskurve m der Punkte M fällt daher bei konstant gedrahten Flächen in die *Berührkurve der Zentralnormalenfläche mit der asymptotischen Torse* von Φ . Die von den Zentraltangenten von Φ erfüllte Zentraltangentenfläche Φ^* besitzt dieselbe Striktionslinie und dieselben Zentralnormalen wie Φ . Die asymptotische Torse von Φ ist Polartorse von Φ^* , die Gerade a Krümmungsachse von Φ^* und M daher — wenn Φ konstant gedraht ist — polare Krümmungsmitte der Zentraltangentenfläche⁶. Zusammengefaßt gilt:

Bei den Flächen konstanten Dralls Φ ist die Kurve ihrer Affinkrümmungsmitten identisch mit der Kurve der polaren Krümmungsmitten der Zentraltangentenfläche von Φ .

Für besondere Strahlflächen konstanten Dralls kann die Kurve m

$$m = \bar{s} - \frac{d}{\kappa_2} n = \bar{s} - \frac{\sin \sigma}{\tau} n \quad (12)$$

mit der Striktionslinie s_1 der Zentralnormalenfläche Φ_1

$$\xi_1(u, \lambda) = \bar{s}(u) + \lambda n(u) \quad (13)$$

zusammenfallen. Für den Ortsvektor $\bar{s}_1$ dieser Striktionslinie s_1 erhält man nach (13) (vgl. [13, S. 155]):

$$\bar{s}_1 = \bar{s} + \frac{\kappa \cos \sigma - \tau \sin \sigma}{\kappa^2 + \tau^2} n \quad (14)$$

und diese Kurve s_1 stimmt genau dann mit m überein, falls

$$\kappa_2 = -\operatorname{tg} \sigma \quad (15)$$

⁶ Unter „Polarebene“ einer Strahlfläche versteht man die von der Zentraltangente und Zentralnormale aufgespannte Ebene. Die Grenzgerade der Polartorse heißt — in Analogie zur Kurventheorie — „Krümmungsachse“ und der Lotfußpunkt aus dem Striktionspunkt auf die Krümmungsachse „polare Krümmungsmitte“ (vgl. [13, S. 151]).

ist. Durch (15) sind jene Strahlflächen charakterisiert, deren Striktionslinie eine Krümmungslinie ist [13, S. 149]. Flächen dieser Art, die außerdem konstant gedraht sind, besitzen als oskulierende Hyperboloide lauter Drehflächen und wurden unter anderem von *P. Serret* [20, S. 156], *M. Lelievre* [15] und *R. Edlinger* [8] untersucht. Der Letztgenannte gab eine einheitliche kinematische Erzeugung dieser Flächen an (vgl. auch [17, S. 84f.] und [2]). Es gilt somit:

Strahlflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehflächen sind, können dadurch charakterisiert werden, daß ihre affinen Krümmungsmitten die Striktionslinie ihrer Zentralnormalenfläche erfüllen.

Strahlflächen, bei denen *M* ein fester eigentlicher Punkt ist, werden als eigentliche windschiefe Affinsphären bezeichnet [1, S. 224]⁷. Ist eine solche speziell konstant gedraht, so erhält man nach (7) und (12)

$$m' = (\cos \sigma + d \frac{\kappa}{\kappa_2}) e + d \frac{\kappa_2'}{\kappa_2^2} n = 0 \quad (16)$$

und damit

$$\kappa_2 = -\operatorname{tg} \sigma, \quad \kappa_2' = \sigma' = 0. \quad (17)$$

Es liegt also eine Fläche von obigem Typus vor, und zwar mit konstanter Striktion σ . Die natürlichen Gleichungen dieser Fläche sind $\kappa = \sin \sigma : d = \text{konst.}$, $\tau = -\kappa \operatorname{tg} \sigma = \text{konst.}$, $\sigma = \text{konst.}$; dadurch sind aber die Drehhyperboloide gekennzeichnet, so daß gilt:

Die einzigen windschiefen eigentlichen Affinsphären mit konstantem Drall sind die Drehhyperboloide.

Eine uneigentliche Affinsphäre liegt vor, wenn die Affinnormalen sämtlicher Punkte der Fläche parallel sind [1, S. 221]. Da bei einer konstant gedrahten Fläche die Affinnormalen in den Striktionspunkten mit den Zentralnormalen zusammenfallen, müßten sämtliche Zentralnormalen einer konstant gedrahten uneigentlichen Affinsphäre parallel sein, also $n' = 0$ gelten. Nach (4) ist dann $\kappa = \tau = 0$, das heißt es gibt keine windschiefen uneigentlichen Affinsphären mit konstantem Drall.

4. Die asymptotischen Ebenen α von Φ umhüllen die asymptotische Torse, deren Erzeugenden a parallel zu den Erzeugenden e von Φ und im allgemeinen Tangenten einer Gratlinie c sind. Überträgt man die durch die Parameterbelegung auf der Striktionslinie s definierten Orientierung auf die Gratlinie c , so entsteht das begleitende Dreiein $\{t, h, b\}$ von c durch Parallelverschiebung des begleitenden Dreieins

⁷ Sämtliche windschiefen Affinsphären wurden von *J. Radon* [18] bestimmt.

$\{e, n, \beta\}$ von Φ aus dem Striktionspunkt S in den Gratpunkt A der Torse (Abb. 1) und c besitzt die Darstellung (vgl. [13, S. 150])

$$c(u) = \tilde{s}(u) + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\sigma'}{\tau} \cos \sigma - \frac{\tau'}{\tau^2} \sin \sigma \right) e - \frac{\sin \sigma}{\tau} n. \quad (18)$$

Ist die asymptotische Torse speziell ein Kegel Γ , so ist $c' = 0$ und man erhält als natürliche Gleichung solcher Flächen nach (18)

$$\left(\frac{\sin \sigma}{\tau} \right)'' - \frac{\kappa'}{\kappa} \left(\frac{\sin \sigma}{\tau} \right)' + \frac{\kappa}{\tau} (\tau \cos \sigma + \kappa \sin \sigma) = 0. \quad (19)$$

Die konische Krümmung der Gratlinie c (die denselben Richtkegel wie die Fläche Φ besitzt) bzw. die konische Krümmung des Kegels Γ stimmt mit der konischen Krümmung κ_2 von Φ überein. Unter Ver-

wendung von (11) kann nun folgende *einheitliche Erzeugung der Strahlflächen konstanten Dralls* angegeben werden (Abb. 1):

Verschiebt man die Tangenten einer Raumkurve c in den Schmiegebenen um die Strecke $d : \kappa_2$ in Richtung ihrer positiven Hauptnormalen (wobei κ_2 die konische Krümmung von c und d irgend eine Konstante ist), so entsteht eine Strahlfläche Φ vom konstanten Drall d ; Φ besitzt c als Gratlinie ihrer asymptotischen

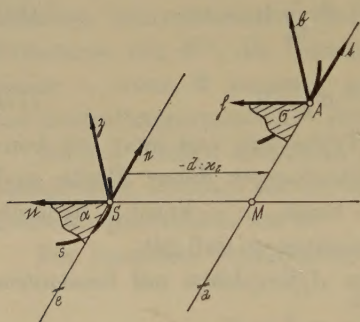


Abb. 1. Begleitende Dreibeine einer Strahlfläche und der Gratlinie ihrer asymptotischen Torse

Torse. Die konstant gedrahten Flächen mit einem asymptotischen Kegel Γ erhält man in analoger Weise ausgehend von Γ .

Diese Erzeugung läßt die Flächen konstanten Dralls überraschend als Verallgemeinerungen der Torsen erkennen, die man für $d = 0$ erhält. Obige Erzeugung versagt nur dann, wenn die Gratpunkte A durchwegs uneigentlich sind, also nach (18), wenn eine *konoidale Fläche* ($\tau = 0$) oder ein *Zylinder* ($\kappa = 0$) vorliegt. Die konoidalen Strahlflächen konstanten Dralls werde ich in einer anderen Arbeit behandeln [7]. Wir wollen im folgenden jene konstant gedrahten Flächen, deren asymptotische Torse die Tangentenfläche einer Raumkurve ist, *Flächen 1. Art* nennen und solche mit einem asymptotischen Kegel kurz als *Flächen 2. Art* bezeichnen.

Für besondere Strahlflächen konstanten Dralls kann es geschehen, daß stets die affine Krümmungsmittelpunkte M mit dem Gratpunkt A der asymptotischen Torse zusammenfällt. Nach (18) muß dann

$$\frac{\sigma'}{\tau} \cos \sigma - \frac{\tau'}{\tau^2} \sin \sigma = \left(\frac{\sin \sigma}{\tau} \right)' = 0 \quad (20)$$

sein. Wegen $\sin \sigma = d\kappa$ erhält man bei konstantem Drall aus (20) $\kappa_2 = \text{konst.}$ Solche konstant gedrahten Flächen konstanter konischer Krümmung, deren Erzeugenden eine konstante Böschung gegen eine Ebene besitzen, bezeichnet *E. Kruppa* als „verallgemeinerte Böschungsflächen“ ([13, S. 170], vgl. auch [2])⁸. Man erhält sie nach obiger Erzeugung, wenn man von einer Böschungslinie c ausgeht. Die entsprechenden Flächen 2. Art besitzen als asymptotische Torse einen Drehkegel und sind nach obiger Erzeugung Drehhyperboloide. Ich werde die verallgemeinerten Böschungsflächen an anderer Stelle behandeln [7].

Um eine *analytische Darstellung der Flächen 1. Art* zu erhalten, denken wir uns eine Raumkurve c gegeben durch eine Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$. Ist κ_2 ihre konische Krümmung und $\{t, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}\}$ ihr begleitendes Dreiein, so erhält man nach obiger Erzeugung mittels eines Parameters λ eine Fläche 1. Art Φ_1 durch den Ansatz

$$\mathfrak{X}(t, \lambda) = \mathfrak{x}(t) + \frac{d}{\kappa_2(t)} \mathfrak{h}(t) + \lambda \mathfrak{t}(t). \quad (21)$$

Unter Verwendung der Frenetschen Formeln von c können sämtliche in (21) vorkommenden Funktionen von t ausgedrückt werden durch Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ (wobei der Punkt Differentiation nach t bedeutet). Nennt man den Koeffizienten von $\dot{\mathfrak{x}}$ wieder λ , so gilt:

$$\mathfrak{X}(t, \lambda) = \mathfrak{x}(t) + d \frac{(\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}})^2}{(\ddot{\mathfrak{x}} \ddot{\mathfrak{x}} \ddot{\mathfrak{x}}) \dot{\mathfrak{x}}^2} \ddot{\mathfrak{x}} + \lambda \mathfrak{x}. \quad (22)$$

⁸ Vom affingometrischen Standpunkt sind diese Flächen dadurch ausgezeichnet, daß sie — wie aus den Formeln der affinen Flächentheorie leicht zu folgern ist — die einzigen konstant gedrahten windschiefen Flächen konstanter mittlerer Affinkrümmung sind. (Sämtliche windschiefen Flächen konstanter mittlerer Affinkrümmung sind in [1, S. 219] angegeben.) Unter ihnen sind insbesondere für verschwindende mittlere Affinkrümmung die Affinminimalflächen konstanten Dralls enthalten, die mit den konstant gedrahten konoidalen Flächen identisch sind. Die konstant gedrahten konoidalen Flächen mit einer eigentlichen Leitgeraden habe ich in [6] gekennzeichnet.

Die Erzeugenden dieser Strahlfläche Φ_I besitzen die Plückerkoordinaten:

$$\begin{aligned} p_1 : \dots : p_6 = & (\dot{x} \ddot{x} \ddot{x}) \dot{x}^2 \dot{x} : (\dot{x} \ddot{x} \ddot{x}) \dot{x}^2 \dot{y} : (\dot{x} \ddot{x} \ddot{x}) \dot{x}^2 \dot{z} : \\ & : (\dot{x} \ddot{x} \ddot{x}) \dot{x}^2 (y \dot{z} - z \dot{y}) + d(\dot{x} \times \ddot{x})^2 (\dot{z} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{z}) : \\ & : (\dot{x} \ddot{x} \ddot{x}) \dot{x}^2 (z \dot{x} - x \dot{z}) + d(\dot{x} \times \ddot{x})^2 (\dot{x} \ddot{z} - \dot{z} \ddot{x}) : \\ & : (\dot{x} \ddot{x} \ddot{x}) \dot{x}^2 (x \dot{y} - y \dot{x}) + d(\dot{x} \times \ddot{x})^2 (\dot{y} \ddot{x} - \dot{x} \ddot{y}). \end{aligned} \quad (23)$$

In analoger Weise kann man eine *Darstellung der Flächen 2. Art* Φ_{II} gewinnen, wenn man ihren asymptotischen Kegel Γ vorgibt durch die vom Ursprung ausstrahlenden Vektoren $a(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t)\}$. Die zu (23) analoge Formel lautet dann

$$\begin{aligned} p_1 : \dots : p_6 = & (a \dot{a} \ddot{a}) a^2 a_1 : (a \dot{a} \ddot{a}) a^2 a_2 : (a \dot{a} \ddot{a}) a^2 a_3 : \\ & : d(a \times \dot{a})^2 (a_3 \dot{a}_2 - a_2 \dot{a}_3) : \\ & : d(a \times \dot{a})^2 (a_1 \dot{a}_3 - a_3 \dot{a}_1) : \\ & : d(a \times \dot{a})^2 (a_2 \dot{a}_1 - a_1 \dot{a}_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Mit (23) und (24) ist die *explizite Darstellung sämtlicher nicht konoidalen Flächen konstanten Dralls* ausgehend von einer vorgegebenen Vektorfunktion $x(t)$ bzw. $a(t)$ und einer Konstanten d gegeben⁹. Man erkennt aus diesen Formeln, daß zu algebraischen und insbesondere rationalen Kurven c und Kegeln Γ algebraische bzw. rationale Strahlflächen konstanten Dralls gehören. Variiert bei fest vorgegebener Vektorfunktion die Größe d , so entsteht eine einparametrische Mannigfaltigkeit von Flächen 1. bzw. 2. Art, die sämtlich dieselbe asymptotische Torse und damit auch dieselbe Fernkurve besitzen. Nach (24) sind sämtliche Flächen 2. Art einer solchen Schar zueinander ähnlich.

5. Es werde nun ein Beispiel für eine solche Schar konstant gedrahter Flächen mit derselben asymptotischen Torse behandelt, und zwar ist dieses Beispiel so gewählt, daß die entstehenden Flächen reell und rational von möglichst geringem Grad sind. Auf Grund vorangegangener Untersuchungen des Autors (vgl. [4], [6]) liegt es nahe, dabei solche Flächen ins Auge zu fassen, deren Zentraltorsen einen Drehkegel vom Öffnungswinkel $\pi : 3$ als Richtkegel besitzen¹⁰. Der Richtkegel der

⁹ Gibt man den Drall d als Funktion des Parameters t beliebig vor, so stellt (23) bzw. (24) eine allgemeine Strahlfläche dar. Ausgehend von den natürlichen Gleichungen der asymptotischen Torse könnte man durch Hinzufügen des Dralls eine zweckmäßige *natürliche Geometrie der Strahlflächen* aufbauen.

¹⁰ Unter Zentralebene einer Strahlfläche versteht man ihre Tangentialebene im Striktionspunkt; sämtliche Ebenen dieser Art umhüllen die Zentraltorse.

Fläche ist dann Evolventenkegel dieses Drehkegels [17, S. 136] und wegen des Öffnungswinkels $\pi:3$ rational; seine Fernkurve ist eine gespitzte Kubik k , die den absoluten Kegelschnitt in zwei (konjugiert komplexen) Punkten oskuliert [12, S. 92]. Eine solche Kubik k ist bezüglich ihrer Spitzentangente projektiv symmetrisch. Liegt die Spitze im Fernpunkt der x -Achse und ist die Spitzentangente die Ferngerade der xy -Ebene, so geht k durch den Fernpunkt der z -Achse, der als Symmetriezentrum ihr einziger Wendepunkt ist; die Gerade

$$x_0 = \sqrt{3} x_1 + x_2 = 0 \quad (25)$$

verbindet die absoluten Punkte von k^{11} . Die Kubik k besitzt demnach die Gleichungen

$$x_0 = 9 x_1 x_3^2 + 9 \sqrt{3} x_2 x_3^2 + 8 \sqrt{3} x_2^3 = 0 \quad (26)$$

und gestattet die Parameterdarstellung

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 3 \sqrt{3} (t^2 + 1) : -3 t^2 : \sqrt{8} t^3. \quad (27)$$

Flächen 1. Art von möglichst geringem Grad mit dieser Fernkurve k erhält man, wenn die Gratlinie c ihrer asymptotischen Torse eine Raumkurve c von nur dritter Ordnung ist, deren Tangentenfläche die Fernebene ω in der Kubik k schneidet. Da die Tangentenfläche einer Raumkurve aber von vierter Ordnung ist, muß ω eine Tangentialebene von c sein und c somit eine kubische hyperbolische Parabel. Der ebene Schnitt der Tangentenfläche einer Raumkurve besitzt im allgemeinen Spitzen in jenen Punkten, wo die Gratlinie der Fläche die Schnittebene durchsetzt; ist die Schnittebene speziell Tangentialebene der Gratlinie, ohne sie jedoch zu oskulieren, so ist der Berührungspunkt ein Wendepunkt des ebenen Schnittes. c muß demnach durch den Fernpunkt der x -Achse gehen ($t = 0$) und die Fernebene im Fernpunkt der z -Achse berühren ($t = \infty$). Macht man für c den Ansatz

$$x_j = a_j + b_j t + c_j t^2 + d_j t^3 \quad (j = 0, 1, 2, 3), \quad (28)$$

so ist $a_0 = a_2 = a_3 = c_0 = d_0 = d_1 = d_2 = 0$ und wegen der Homogenität der Darstellung kann $b_0 = 1$ gewählt werden. Der Ortsvektor von c lautet somit

$$x \left\{ \frac{a_1}{t} + b_1 + c_1 t, \quad b_2 + c_2 t, \quad b_3 + c_3 t + d_3 t^2 \right\}. \quad (29)$$

¹¹ Die diesbezüglichen Rechnungen habe ich — in einem etwas geänderten Koordinatensystem — in [4] durchgeführt.

Durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems läßt sich $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ erreichen. Die Fernkurve des Richtkegels von c muß nun mit (27) identisch sein und das liefert

$$a_1 : c_1 : c_2 : c_3 : d_3 = -3\sqrt{3} : 3\sqrt{3} : -3 : 0 : \sqrt{2}. \quad (30)$$

Da es auf ähnliche Umformungen nicht ankommt, setzen wir etwa $c_1 = 2\sqrt{2}$; durch diese Wahl werden die Koeffizienten in den folgenden Gleichungen möglichst einfach. Damit lautet die Darstellung von c

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 9t : 18\sqrt{2}(t^2 - 1) : -6\sqrt{6}t^2 : 4\sqrt{3}t^3. \quad (31)$$

Unter Verwendung von (23) ergibt sich für die zugehörigen Strahlflächen 1. Art:

$$p_1 : \dots : p_6 = 9(1 + t^2) : -3\sqrt{3}t^2 : 2\sqrt{6}t^3 : -2(2 + d)t^4 : \\ : 6\sqrt{3}(2 - d)t^2 - 2\sqrt{3}(2 + d)t^4 : 3\sqrt{6}(4 - d)t \quad (32)$$

und daraus berechnet man die Gleichung

$$(x + \sqrt{3}y)[8\sqrt{3}y^3 - 72yz + 9z^2(x + \sqrt{3}y)] + \\ + 4\sqrt{3}(d + 2)[\sqrt{3}(d - 2)y^2 + (d - 4)^2z] = 0. \quad (33)$$

Jede dieser Flächen $\Phi_1(d)$ ist zur z -Achse axial symmetrisch. Für $d \neq -2, \neq 4$ liegen *rationale Strahlflächen 4. Grades* vor, die nach der *Sturmschen Einteilung von III. Art* sind. Sie besitzen zwei gemeinsame Torsallinien zweiter Ordnung, und zwar ist die x -Achse eine zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung und die Ferngerade der Ebene $x + \sqrt{3}y = 0$ eine Ferntorsallinie zweiter Ordnung. Die Ebenen $z = 0$ bzw. $x + \sqrt{3}y = 0$ stellen die Torsalebene dar, die Kuspidualpunkte sind die Fernpunkte der x - bzw. z -Achse. Die Ebene $z = 0$ schneidet $\Phi_1(d)$ außerdem in der Hyperbel

$$z = 2(x + \sqrt{3}y)y + \sqrt{3}(d^2 - 4) = 0, \quad (34)$$

die Ebene $x + \sqrt{3}y = 0$ in der Parabel

$$x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}(d - 2)y^2 + (d - 4)^2z = 0. \quad (35)$$

Die Fläche $\Phi_1(d)$ kann durch eine projektive Kopplung zwischen diesen beiden Kegelschnitten, die keinen Punkt gemeinsam haben, erzeugt werden. Da $\Phi_1(d)$ den Rang 6 besitzt, ist ihre Striktionslinie eine Kurve 12. Ordnung. Zu ihr zählen jedoch zweifach die beiden isotropen Erzeugenden in der zur Ebene $y = 0$ bezüglich der Ebene $x + \sqrt{3}y = 0$ symmetrischen Ebene, ferner zweifach die uneigentliche Torsallinie und einfach die zylindrische Erzeugende (vgl. [11] und [17, S. 152]).

Als „eigentliche Striktionslinie“ s bleibt eine Kurve 5. Ordnung, deren Parameterdarstellung nach (32) lautet

$$x_0 : \dots : x_3 = 3\sqrt{6}t(2t^2 + 3) : 3\sqrt{3}[4(d+2)t^4 + (5d+4)t^2 + 3(d-4)] : \\ : -3t^2[4(d+2)t^2 + 3(4-d)] : 4\sqrt{2}t^3[(d+2)t^2 + 3(1-d)]. \quad (36)$$

Sie enthält den Kuspidalpunkt der zylindrischen Erzeugenden, die Fernpunkte der isotropen Erzeugenden und berührt die Ferntorsallinie in ihrem Kuspidalpunkt.

Jede dieser Flächen $\Phi_1(d)$ trägt eine Doppelkubik, für die unter Verwendung eines Parameters μ gilt:

$$x_0 : \dots : x_3 = \sqrt{3}(4-d)\mu : 3(d-4)\mu^2 + (4-d)^2(d+2) : \\ : \sqrt{3}(4-d)\mu^2 : 2\mu^3. \quad (37)$$

$\Phi_1(d)$ besteht aus allen Sehnen dieser Kubik, die auch in dem nicht-singulären Gewinde mit den Plückerkoordinaten $-\sqrt{3}:1:0:0:2(2-d):0$ liegen. Die Fernkurve der Zentraltorse von $\Phi_1(d)$ ist nach (32) der Fernkreis

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : -\sqrt{3}t^2 : (t^2 - 3) : 3\sqrt{2}t \quad (38)$$

und daher ist die Zentraltorse eine Böschungsfläche, für deren Gratlinie man unter Verwendung von (36) erhält:

$$x_0 : \dots : x_3 = 9\sqrt{3} : 2\sqrt{6}(d+2)(t^3 + 9t) : 6\sqrt{2}(d+2)t^3 : \\ : 9[2(d+2)t^2 + (4-d)]. \quad (39)$$

Das ist eine kubische Parabel, deren Fernpunkt $(0:1:\sqrt{3}:0)$ der absolute Pol der Ferntorsallinie von $\Phi_1(d)$ ist.

Speziell für $d=4$ besitzt die zugehörige Fläche $\Phi_1(4)$ nach (32) die Gleichung

$$(x + \sqrt{3}y)[8\sqrt{3}y^3 - 72yz + 9z^2(x + \sqrt{3}y)] + 144y^2 = 0. \quad (40)$$

$\Phi_1(d)$ liegt in einem parabolischen Netz um die z -Achse und enthält die x -Achse als Rückkehrerzeugende. Sie ist nach der *Sturmschen* Einteilung von VIII. Art, die z -Achse ist die doppelte Leitgerade. Sie besitzt den Rang 5 und ihre eigentliche Striktionslinie ist nach (36) eine Kurve 4. Ordnung II. Art. Die Fläche $\Phi_1(4)$ ist mit der *einzigsten* reellen Netzfläche 4. Grades von konstantem Drall identisch, die bereits in [6] ausführlich untersucht wurde.

Ist speziell $d=-2$, so reduziert sich die Ordnung der zugehörigen Fläche und es liegt nach (33) eine kubische Strahlfläche $\Phi_1(-2)$ vor mit der Gleichung

$$8\sqrt{3}y^3 - 72yz + 9z^2(x + \sqrt{3}y) = 0. \quad (41)$$

Sie ist in einem parabolischen Netz um die x -Achse enthalten und besitzt diese als zylindrische Erzeugende zweiter Ordnung. Die eigentliche Striktionslinie s dieser *Cayleyschen Fläche* ist nach (36) ein schiefer kubischer Kreis. Nach (39) ist ihre Zentraltorse ein Drehkegel vom Öffnungswinkel $\pi:3$ mit der Spitze in $x = y = 0, z = 2\sqrt{3}$. Von dieser Fläche konnte ich nachweisen, daß sie die *einzig reelle kubische Strahlfläche konstanten Dralls* ist [4]; sie wurde von J. Krames in [10, S. 71, 84, 88], [11, S. 89], [12, S. 89], [17, S. 241] ausführlich untersucht.

Nun sind noch die Flächen 2. Art mit der Fernkurve k zu besprechen. Unter Verwendung von (27) und (24) erhält man für diese

$$\begin{aligned} p_1 : \dots : p_6 &= 9(1 + t^2) : -3\sqrt{3}t^2 : 2\sqrt{6}t^3 : -2dt^4 : \\ &: -2\sqrt{3}dt^2(t^2 + 3) : -3\sqrt{6}dt \end{aligned} \quad (42)$$

und damit die Gleichung:

$$(x + \sqrt{3}y)[8\sqrt{3}y^3 + 9z^2(x + \sqrt{3}y)] + 12d^2y^2 + 4d^3\sqrt{3}z = 0. \quad (43)$$

Der gemeinsame asymptotische Kegel dieser zur z -Achse symmetrischen Flächen $\Phi_{II}(d)$ hat seine Spitze im Ursprung; variiert d , so entstehen zueinander ähnliche Flächen $\Phi_{II}(d)$. Auch diese sind von 4. Grad und nach der *Sturmschen Einteilung* von III. Art und durch eine Projektivität zwischen der Hyperbel

$$z = 2y(x + \sqrt{3}y) + \sqrt{3}d^2 = 0 \quad (44)$$

und der Parabel

$$x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}y^2 + dz = 0 \quad (45)$$

erzeugbar. Sie besitzen dieselben Torsalelemente wie die obigen Flächen 4. Grades III. Art $\Phi_1(d)$, ihre eigentlichen Striktionslinien sind Raumkurven 5. Ordnung

$$\begin{aligned} x_0 : \dots : x_3 &= 3\sqrt{6}t(2t^2 + 3) : 3\sqrt{3}d(4t^4 + 5t^2 + 3) : 3dt^2(3 - 4t^2) : \\ &: 4\sqrt{2}dt^3(t^2 - 3) \end{aligned} \quad (46)$$

und ihre Doppelkubiken haben die Gleichungen

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt{3}d\mu : -3d\mu^2 - d^3 : \sqrt{3}d\mu^2 : -2\mu^3. \quad (47)$$

Jede dieser Flächen besteht aus den Sehnen ihrer Doppelkubik, die im nichtsingulären Gewinde $-\sqrt{3}:1:0:0:-2d:0$ liegen. Ihre Zentraltorse ist die Tangentenfläche der kubischen Böschungsparebel

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 9\sqrt{3} : 2\sqrt{6}dt(t^2 + 9) : 6\sqrt{2}dt^3 : 9d(2t^2 - 1). \quad (48)$$

Die Flächen $\Phi_I(d)$ ($d \neq -2, \neq 4$) und die Flächen $\Phi_{II}(d)$ kommen in der Literatur bisher nicht vor.

6. Die Flächen $\Phi_I(d)$ (32) und $\Phi_{II}(d)$ (42) gestatten die eingliedrige Gruppe projektiver Automorphismen

$$\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 = \tau^2 x_0 : \tau^3 x_1 + \tau(\tau^2 - 1) \sqrt{3} x_2 : \tau x_2 : x_3. \quad (49)$$

Die Ecken des Fixtetraeders sind dabei die Punkte $A_1(1:0:0:0)$, $A_2 = X_u(0:1:0:0)$, $A_3(0:1:-\sqrt{3}:0)$, $A_4 = Z_u(0:0:0:1)$; dieses Tetraeder ist durch die Torsalelemente der Flächen bestimmt. Bei den Kollineationen (49) bleiben die Quadriken des Büschels

$$x_3(x_1 + \sqrt{3} x_2) + A x_0 x_2 = 0 \quad (50)$$

einzeln fest. Zeichnet man eines dieser hyperbolischen Paraboloiden als Maßfläche einer *Cayley-Kleinschen* Maßbestimmung aus, so sind die Flächen $\Phi_I(d)$ und $\Phi_{II}(d)$ *nichteuklidische Strahlschraubflächen*¹². Die Bahnkurven der speziellen nichteuklidischen Schraubung (49) sind Raumkubiken mit dem Fixtetraeder als gemeinsames Schmiegtetraeder. Die Fernebene ist Fixebene der Schraubung; in ihr liegen ebene kubische Bahnkurven, die sämtlich in A_2 eine Spitze mit gemeinsamer Spitzentangente und in A_4 einen Wendepunkt mit gemeinsamer Wendetangente besitzen. Sämtliche dieser ∞^1 Kubiken sind bezüglich ihrer Spitzentangente projektiv symmetrisch. Genau eine unter ihnen oskuliert den absoluten Kegelschnitt in zwei Punkten und ist identisch mit der Fernkubik k (26) der Flächen $\Phi_I(d)$ und $\Phi_{II}(d)$.

Wird von (euklidischen) Ähnlichkeitstransformationen abgesehen und unterwirft man eine die Fernkubik k treffende Gerade, die allgemeine Lage zum Fixtetraeder besitzt, der Schraubung (49), so entsteht die Strahlfläche 4. Grades *III*. Art vom Typus (33) oder (43) mit konstantem Drall; schneidet insbesondere die Gerade die Tetraederkante $A_1 A_4$, also die z -Achse, so entsteht beim Verschrauben die Fläche 4. Grades *VIII*. Art mit konstantem Drall von der Form (40) (vgl. [6]). Trifft schließlich die Gerade die gemeinsame Tangente $A_1 A_2$ der Bahnkubiken, also die x -Achse, so ergibt sich die konstant gedrahte *Cayley*-sche Strahlfläche 3. Grades (41). Wir können somit feststellen:

Die konstant gedrahten Strahlflächen (33), (43), (40), (41) sind im obigen Sinne nichteuklidische Strahlschraubflächen.

¹² Bezüglich dieses Begriffs vgl. *K. Strubecker* [21] und [17, S. 163]. Für die folgende spezielle nichteuklidische Schraubung vgl. insbesondere [21, S. 77].

Literatur

- [1] W. Blaschke-K. Reidemeister, Affine Differentialgeometrie. Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Springer (1923).
- [2] H. Brauner, Über Strahlflächen von konstantem Drall. Mh. Math. **63**, 101—111 (1959).
- [3] H. Brauner, Eine Verallgemeinerung des Problems der Cesàrokurven. Ann. Math. **138**, 27—41 (1959).
- [4] H. Brauner, Die Strahlfläche 3. Grades mit konstantem Drall. Mh. Math. **64**, 101—109 (1960).
- [5] H. Brauner, Erweiterung des Begriffs Drall auf Mongesche Flächen. Anz. Akad. Wiss. Wien, 139—144 (1960).
- [6] H. Brauner, Die konstant gedrahte Netzfläche 4. Grades. Mh. Math. (im Druck).
- [7] H. Brauner, Die verallgemeinerten Böschungsfächen. Ann. Math. (im Druck).
- [8] R. Edlinger, Über Regelfächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **132**, 343—351 (1923).
- [9] W. Haack, Differentialgeometrie II. Wolfenbüttel (1948).
- [10] J. Krames, Die Regelfächen 3. Ordnung, deren unendlich ferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **133**, 65—90 (1924).
- [11] J. Krames, Über das Zerfallen der Striktionslinie von Regelfächen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **135**, 227—269 (1926).
- [12] J. Krames, Die Regelfächen dritten Grades mit einem Drehkegel als Zentraltorse. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **155**, 83—96 (1947).
- [13] E. Kruppa, Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **157**, 143—176 (1949).
- [14] E. Kruppa, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer (1957).
- [15] M. Lelievre, Sur les lignes de courbure et les lignes asymptotiques des surfaces. C. R. Paris **106**, 183—186 (1888).
- [16] F. Löbell, Zur Differentialgeometrie der Regelscharen. Jb. dt. Math. V. **51**, 29—41 (1941).
- [17] E. Müller-J. Krames, Konstruktive Behandlung der Regelfächen. Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Deuticke (1931).
- [18] J. Radon, Zur Affingeometrie der Regelfächen. Leipz. Ber. **70**, 147—155 (1918).
- [19] H. Schaal, Über Regelfächen mit ähnlichen Lieschen Schmieglächen 2. Ordnung und die Spitzen der scheinbaren Umrissse von Regelschraubflächen bei Parallelprojektion. Sitzb. Bayr. Akad. Wiss. **111**—182 (1959).
- [20] P. Serret, Théorie nouvelle géom. et méc. des lignes à double courbure. Paris (1860).
- [21] K. Strubecker, Über nichteuklidische Schraubungen. Mh. Math. **38**, 63—84 (1931).

Eine Bemerkung zur Methode von D. A. Baschkirow für die numerisch-graphische Lösung von Differentialgleichungen

Von

Erich Bukovies, Wien

Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. E. Kruppa zu seinem 75. Geburtstag gewidmet

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 28. November 1960)

In den Anwendungen sind oft Aufgaben zu lösen, die auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten führen. Dabei ist die Störfunktion unter Umständen nur tabellarisch oder graphisch auf Grund von Messungen bekannt. In solchen Fällen wird man sich gerne einer numerischen oder graphischen Methode zur Lösung derselben bedienen. Man kann bei der Entwicklung von graphischen Verfahren dabei zwei Wege einschlagen, je nachdem, ob die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung bestimmt werden sollen oder nicht.

Kennt man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so kann man (man vergleiche z. B. [3]) die Differentialgleichung

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) x = a_n f(t) \quad (1)$$

(a_i reell, $a_n \cdot f(t)$ Störfunktion, $p = \frac{d}{dt}$) mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (2)$$

auf ein einfaches System von Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zurückführen: Sind etwa von den n Nullstellen der charakteristischen Gleichung m reell:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{T_1}, \lambda_2 = -\frac{1}{T_2}, \dots, \lambda_m = -\frac{1}{T_m} \quad (3)$$

und werden die komplexen Wurzeln paarweise hintereinander angeordnet und etwa für

$$Z_{m+1} = -\alpha + i\omega, \quad Z_{m+2} = -\alpha - i\omega \quad (4)$$

die Konstanten T_{m+1} , T_{m+2} in folgender Weise definiert:

$$T_{m+1} = \frac{1}{2\alpha}, \quad T_{m+2} = \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (5)$$

so lautet das System von Gleichungen erster und zweiter Ordnung (mit reellen Koeffizienten):

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) x_1 &= f(t), \\ (T_2 p + 1) x_2 &= x_1, \\ &\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ (T_m p + 1) x_m &= x_{m-1}, \\ (T_{m+1} T_{m+2} p^2 + T_{m+2} p + 1) x_{m+2} &= x_m, \\ (T_{m+3} T_{m+4} p^2 + T_{m+4} p + 1) x_{m+4} &= x_{m+2}, \\ &\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ (T_{n-1} T_n p^2 + T_n p + 1) x_n &= x_{n-2}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wobei natürlich die Anfangsbedingungen (2) entsprechend umzurechnen sind. Die Differentialgleichungen können in der angegebenen Reihenfolge nacheinander gelöst werden, da jeweils nur eine unbekannte Funktion neu auftritt. *R. Inzinger* hat [1] ein graphisches Verfahren angegeben, das eine Verallgemeinerung des Linienbildverfahrens von *E. Meißner* [2] darstellt und die schrittweise Durchführung von Evolventoidenbildungen erfordert. Nach *K. Strubecker* [4] kann jedoch die graphische Lösung im Falle lauter reeller Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch durch wiederholte Durchführung der isotropen Schleppenbildung zu der (um eine bestimmte Strecke verschobenen) Störfunktion gewonnen werden.

Will man jedoch die Bestimmung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung vermeiden, oder sind diese nicht schon auf Grund der Entstehung der Gleichung (1) bekannt, so kann man den folgenden zweiten Weg einschlagen: Man setzt in (1):

$$T = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}} \quad (7)$$

und erhält nach Division durch a_n :

$$(T^n p^n + \frac{a_1}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} p + 1) x = f(t). \quad (8)$$

Dividiert man nun das auf der linken Seite stehende Operatorpolynom sukzessive durch den Faktor $(T_p + 1)$ — am einfachsten mit Hilfe des Horner'schen Schemas — und bezeichnet die dabei auftretenden Reste mit $k_1, k_2, \dots, k_n$, so kann man die Differentialgleichung (1) durch das folgende System von Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen:

$$\left. \begin{array}{l} T \dot{x}_1 + x_1 = f(t) - k_1 x, \\ T \dot{x}_2 + x_2 = x_1 - k_2 x, \\ T \dot{x}_3 + x_3 = x_2 - k_3 x, \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ T \dot{x} + x = x_{n-1} - k_n x, \end{array} \right\} \quad (9)$$

wobei wieder die Anfangsbedingungen entsprechend umzurechnen sind. Das System (9) unterscheidet sich vom System (6) einerseits dadurch, daß nur Differentialgleichungen erster Ordnung vorkommen. Andererseits tritt aber auf den rechten Seiten überall die Funktion $x(t)$ auf. *D. A. Baschkirow* hat nun eine Methode entwickelt, die die graphische Lösung von Differentialgleichungen der Form (1) gestattet, wobei sowohl die Rückführung auf das System (6), als auch die Rückführung auf das System (9) zugelassen werden kann. Überdies kann die Methode auch numerisch durchgeführt und auf lineare Differentialgleichungen mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten und auf gewisse Typen nicht-linearer Differentialgleichungen übertragen werden.

D. A. Baschkirow gründet seine Methode [3] auf die — verhältnismäßig kompliziert zu beweisende — Eigenschaft der Exponentialfunktion

$$x = c - c_1 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (10)$$

daß die Projektion der Sekante, die durch zwei beliebige zeitlich äquidistante Punkte dieser Kurve gelegt ist, eine konstante Länge besitzt. Gehören die Punkte zu den Argumenten $t, t + \Delta t$, so ergibt sich für die Länge der Sehne T_c :

$$T_c = \frac{\Delta t}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}}}, \quad (11)$$

wofür man näherungsweise auch

$$T_c \approx T + \frac{\Delta t}{2} \quad (\Delta t \ll T) \quad (12)$$

setzen kann. Da (10) die Lösung der Differentialgleichung:

$$T \dot{x} + x = c \quad (13)$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = c - c_1 \quad (14)$$

ist, erhält man für deren Lösung unter Verwendung von (11), bzw. (12):

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c - x}{T_c} \approx \frac{c - x}{T + \frac{\Delta t}{2}} \quad (15)$$

Ist nun die Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebiger Störfunktion:

$$T \dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = x_0 \quad (16)$$

zu lösen, so kann man die Störfunktion durch eine Treppenkurve ersetzen, die innerhalb jedes Intervalles Δt den konstanten Wert

$$c = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (17)$$

annimmt. Man hat also — intervallweise — die Differentialgleichung (13) zu lösen, wobei c durch (17) bestimmt ist. Daher erhält man aus (12) die Näherungsformel:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - x(t)}{T + \frac{\Delta t}{2}}, \quad (18)$$

die sowohl zur graphischen, als auch zur numerischen Lösung verwendet

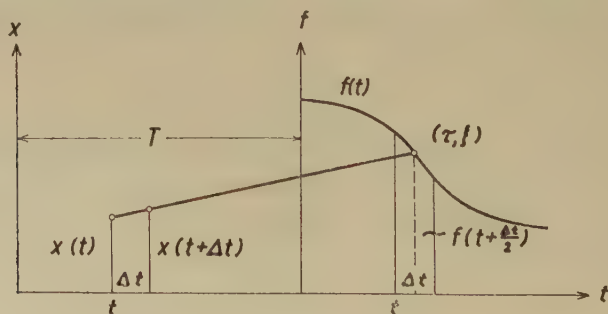


Abb. 1

werden kann. Wesentlich ist dabei, daß die Störfunktion nur längs der t -Achse um die Zeitkonstante T zu verschieben ist, worauf man durch einfaches Ziehen von Geraden schrittweise, vom Anfangspunkt ausgehend, eine Näherungslösung konstruieren kann. Einen Integrations-schritt zeigt Abb. 1.

Diese Konstruktion wird dann auf die Gleichung erster Ordnung:

$$T \dot{x} = f(t), \quad x(0) = x_0 \quad (19)$$

und auf die Gleichung zweiter Ordnung

$$T_1 T_2 \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = f(t), \quad \dot{x}(0) = x_0, \quad x(0) = \dot{x}_0 \quad (20)$$

übertragen, wobei (20) auf das System

$$\left. \begin{aligned} T_1 \dot{x}_1 + x_1 &= f(t) - x \\ T_2 \dot{x} &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

zurückgeführt werden kann, das aus einer Gleichung vom Typ (16) und einer vom Typ (19) besteht. Damit lassen sich dann Systeme der Form (6) lösen, aber auch Systeme der Form (9), wenn bei der Bildung der Näherungsformeln nur die Argumente bei $x(t)$ um einen halben Integrationsschritt nach rechts verschoben werden. Letzten Endes läuft dann die graphische Integration einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung auf das Ziehen von n Verbindungsgeraden bei jedem Integrationsschritt hinaus. Die numerische Anwendung der Methode ist ebenfalls sehr einfach.

Es ist nun bemerkenswert, daß die Methode von *D. A. Baschkirow* sehr einfach und naturgemäß auf dem wohlbekannten Begriff der Leitkurve einer Differentialgleichung erster Ordnung begründet werden kann. Dies soll im folgenden kurz dargelegt werden. Bekanntlich läßt sich (man vgl. z. B. [5]) das Richtungsfeld einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$T(t) \dot{x} + x = t(t) \quad (22)$$

am einfachsten auf Grund der Eigenschaft konstruieren, daß alle zur selben Ordinate t gehörigen Elementgeraden sich in einem Punkt, dem Leitpunkt (τ, ξ) schneiden, dessen Ordinaten durch

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t + T(t) \\ \xi &= f(t), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

gegeben sind. Die Gesamtheit der Leitpunkte bildet die Leitkurve, deren Parameterdarstellung (mit t als Parameter) ebenfalls durch (23) gegeben ist.

Man erhält nun die Gleichung der Leitkurve von (16):

$$T \dot{x} + x = f(t),$$

indem man in (23) T konstant läßt:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t + T, \\ \xi &= f(t), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

woraus die bekannte Eigenschaft folgt, daß sich für die Gleichung (16) die Leitkurve ganz einfach durch Parallelverschiebung der Störfunktion längs der t -Achse um die Strecke T ergibt. Diese Beziehung bildet auch die Grundlage des Integrativen von *Potier*.

Wählt man nun zur praktischen Durchführung der Konstruktion den Leitpunkt für das Intervall Δt konstant, und zwar den zur Intervallmitte $t + \frac{\Delta t}{2}$ gehörigen, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \tau &= T + (t + \frac{\Delta t}{2}), \\ \xi &= f(t + \frac{\Delta t}{2}). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Diese Formel stimmt inhaltlich mit der Formel (18) von *Baschkirow* überein und führt zur gleichen, in Abb. 1 angegebenen Konstruktion.

Um die Gleichung (19):

$$T \dot{x} = f(t)$$

auch mit Hilfe der gleichen Methode behandeln zu können, fügt man auf beiden Seiten $x(t)$ hinzu:

$$T \dot{x} + x = f(t) + x(t) \quad (26)$$

und erhält für die Leitkurve:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t + T, \\ \xi &= f(t) + x(t), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

wobei auf der rechten Seite die gesuchte Funktion $x(t)$ auftritt. Man nimmt nun wieder den Leitpunkt für ein Intervall der Länge Δt als konstant an. Allerdings benützt man wegen des Auftretens von $x(t)$ den zu t gehörigen Leitpunkt, wobei aber für die Störfunktion der zur Mitte des Intervalles gehörige Funktionswert angenommen wird:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t + T, \\ \xi &= f(t + \frac{\Delta t}{2}) + x(t). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Man kommt wieder zu den gleichen Formeln wie *D. A. Baschkirow*. Die zugehörige Konstruktion unterscheidet sich von der in Abb. 1 gezeigten lediglich dadurch, daß die Störfunktion nur um die konstante Strecke $T - \frac{\Delta t}{2}$ nach rechts verschoben wird und zur Konstruktion des Leitpunktes zur Ordinate $T + \frac{\Delta t}{2}$ noch die aus dem vorhergehenden Integrationsschritt bekannte Ordinate $x(t)$ hinzuzufügen ist.

Will man nun die Betrachtungen auf die Differentialgleichung (20)

$$T_1 T_2 \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = f(t)$$

ausdehnen, so kann man die zu den beiden Differentialgleichungen des Systems (21):

$$\left. \begin{aligned} T_1 \dot{x} + x_1 &= f(t) - x, \\ T_2 \dot{x} &= x_1 \end{aligned} \right\}$$

gehörigen Leitkurven — sie seien mit (τ_1, ξ_1) , bzw. (τ_2, ξ_2) bezeichnet, ermitteln. Nach (24), bzw. (27) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= t + T_1, \\ \xi_1 &= f(t) - x(t). \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \tau_2 &= t + T_2, \\ \xi_2 &= x_1(t) + x(t). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Um nun die Konstruktion einfach ausführen zu können, wählt man den Leitpunkt für die erste Gleichung wie bei (25), also:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= T_1 + (t + \frac{\Delta t}{2}), \\ \xi_1 &= f(t + \frac{\Delta t}{2}) - x(t + \frac{\Delta t}{2}), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

während man für die zweite Gleichung die Integration um $\Delta t/2$ nach rechts verschiebt. Man erhält dann nach (28):

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= T_2 + (t + \frac{\Delta t}{2}) \\ \xi_2 &= x_1(t + \Delta t) + x(t + \frac{\Delta t}{2}) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

und kann die Konstruktion nach Abb. 2 durchführen. Die Koordinatensysteme sind dabei um die Strecken T_2 und T_1 gegeneinander ver-

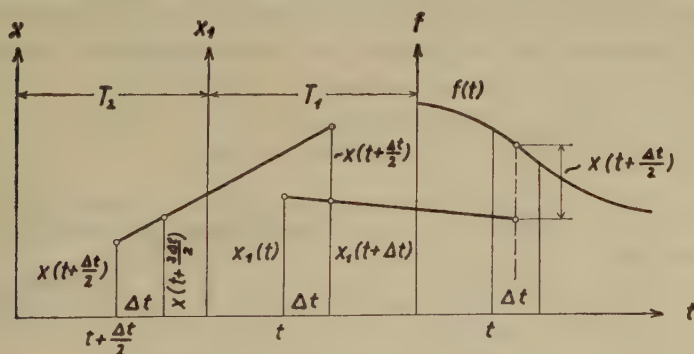


Abb. 2

schoben. Im rechten Koordinatensystem ist die Störfunktion $f(t)$ gezeichnet und es wird nach (30) die Leitkurve für $x_1(t)$ aufgebaut. Im mittleren Koordinatensystem ergibt sich mit Hilfe dieser Leitkurve

die Funktion $x_1(t)$, mit deren Hilfe dann nach (31) die Leitkurve für die gesuchte Lösung $x(t)$ aufgebaut werden kann. Als Anfangswerte braucht man

$$x_1(0) = T_2 \dot{x}_0 \quad (32)$$

und $x(\frac{\Delta t}{2})$, das man näherungsweise nach der Formel:

$$x(\frac{\Delta t}{2}) = x_0 + \frac{\Delta t}{2} \dot{x}_0 \quad (33)$$

berechnen kann. Die Konstruktion läuft also im wesentlichen auf das Ziehen von zwei Verbindungsgeraden hinaus und stimmt dem Inhalt nach wieder mit der von *Baschkirow* angegebenen überein.

Ohne noch auf Einzelheiten einzugehen, sei darauf hingewiesen, daß der hier skizzierte Gedankengang auch auf die graphische Lösung der Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten erster und zweiter Ordnung, also

$$T(t) \dot{x} + x = f(t) \quad (34)$$

und

$$T_1(t) T_2(t) \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = f(t), \quad (35)$$

aber auch auf kompliziertere nichtlineare Differentialgleichungen, wie z. B.

$$T_1 T_2 \ddot{x} + T_2 \dot{x} + x = \Phi(t, x, \dot{x}) \quad (36)$$

oder auf Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen werden kann, wie sie speziell in der Regelungstechnik häufig vorkommen. Auch die Begründung der entsprechenden numerischen Formeln ist auf diesem Weg möglich. Die Einzelheiten der Konstruktion können z. B. aus [5] entnommen werden.

Literatur

- [1] R. Inzinger: Zur graphischen Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Österreichisches Ingenieur-Archiv, Bd. 1 (1947), Seite 410—420.
- [2] E. Meißner: Graphische Analysis vermittels des Linienbildes einer Funktion. Schweizerische Bau-Zeitung, Bd. 98 (1931), S. 287—290, S. 333—335, Bd. 99 (1932), S. 27—30, 41—44, 67—69.
- [3] E. P. Popow: Dynamik automatischer Regelsysteme. (Übersetzung aus dem Russischen.) Akademie-Verlag, Berlin, 1958. Seite 635—664.
- [4] K. Strubecker: Zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichung n . Ordnung $(a_n D + 1) (a_{n-1} D + 1) \dots (a_1 D + 1) y = s(x)$. Archiv der Mathematik, Bd. 1 (1948), S. 65—72.
- [5] Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis. W. de Gruyter, Berlin, 1957, 3. Auflage.

Die Stellung der projektiven Geometrie im relativistischen Weltbild

Von

Ludwig Hofmann, Wien

Herrn Prof. Dr. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 13. Dezember 1960)

Wenn wir die Dinge der Außenwelt hinsichtlich ihres geometrischen Verhaltens betrachten, so können wir zwei große Klassen von Eigenschaften unterscheiden, die wir als die *visuellen* oder Eigenschaften über *Lagebeziehungen* und die *metrischen* oder Eigenschaften über *Maßverhältnisse* einander gegenüberstellen. Während die ersteren durch bloße Lichteindrücke vermittelt werden können, sind die letzteren an das Wesen des starren Körpers gebunden.

Übersehen wir dabei nicht, daß jegliche geometrische Eigenschaft implizite das zeitliche Element enthält. Das Wesen einer geometrischen Eigenschaft beinhaltet ja geradezu das Bestehen — das zeitliche Fortbestehen — eines Merkmals.

Errichtet man auf den visuellen Eigenschaften allein und ohne Heranziehung metrischer Begriffe ein Lehrgebäude, so ergibt sich die *projektive* Geometrie.

Obwohl nun die projektive Geometrie keinerlei metrische Elemente enthält, hat man sie bisher wohl immer nur an starren Systemen versinnlicht. Man hat kaum jemals materielle Systeme in Betracht gezogen, die nicht starr sind, jedoch den Gesetzen der projektiven Geometrie gehorchen.

Man hätte sich solche Systeme folgendermaßen vorzustellen. Die „Punkte“ des Raumes werden durch Massenpunkte repräsentiert, die sich frei im Raume bewegen. Drei Punkte liegen auf einer „Geraden“, wenn von einem geeigneten der drei Punkte aus betrachtet, die beiden

anderen sich decken. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Bewegungszustand des Punktesystems von solcher Art ist, daß je drei Punkte des Systems, die „einmal“ auf einer Geraden liegen, auch „ständig“ auf einer Geraden liegend verbleiben.

Die Definition der „Geraden“ und „Ebenen“ kann dann in naheliegender Weise erfolgen. Wenn nun die „Punkte“, „Geraden“ und „Ebenen“ den Gesetzen der projektiven Geometrie gehorchen, so ist durch das System der Massenpunkte eine Versinnlichung der projektiven Geometrie gegeben. Systeme von Massenpunkten der erwähnten Art sollen als *projektive Massensysteme* bezeichnet werden.

Es ist nun zunächst unmittelbar klar, daß jedes starre System von Massenpunkten, jedes System von Massenpunkten also, die in einem *Galileischen* Bezugssystem ruhen, im obigen Sinne projektiv ist, da sich doch das Licht in *Galileischen* Bezugssystemen „geradlinig“ fortpflanzt. Wir müssen dabei hier wie auch im folgenden stets die gegenseitigen Entfernungen der Massenpunkte so groß voraussetzen, daß von Gravitationswirkungen abgesehen werden kann.

Des weiteren ist sehr leicht einzusehen, daß auch jedes in einem *Galileischen* Bezugssystem gleichmäßig dilatierende System von Massenpunkten — wie es etwa die Sprengstücke eines explodierten Geschosses darstellen — projektiv ist.

Solange wir nun an den vorrelativistischen Vorstellungen von Raum und Zeit festhalten, können wir mit unseren Betrachtungen wohl kaum über *Galileische* Bezugssysteme hinausgehen, machen wir uns aber das *relativistische* Gedankengut zu eigen, so können wir einen gewaltigen Schritt weitergehen.

Das Wesen der *Einsteinschen* Lehre, die unsere Anschauungen von Raum und Zeit auf völlig neue Grundlagen gestellt hat, besteht bekanntlich in der Erkenntnis, daß von Gleichzeitigkeit in zwei voneinander verschiedenen Punkten des Raumes *a priori* nicht gesprochen werden kann, daß eine für das ganze Universum geltende „*wahre, gleichmäßig dahinfließende Zeit*“ nicht existiert.

Minkowski hat erkannt, daß damit die Begriffe „Raum“ und „Zeit“ für sich ihre Bedeutung vollkommen verlieren und nur „*eine Art Union beider bestehen bleibt*“. Jenes vierdimensionale Kontinuum bezeichnet man als die *Welt*, seine Elemente als *Weltpunkte* oder *Ereignisse*.

Das Weltkontinuum stellt eine vierdimensionale *Riemannsche* Mannigfaltigkeit dar. Ist $g_{\mu\nu}$ der kovariante Maßtensor der Mannigfaltig-

keit, so ist bei Zugrundelegung eines beliebigen Koordinatensystems (x_1, x_2, x_3, x_4) die zugehörige *Fundamentalform* durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad \left(\begin{array}{l} \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \\ g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \end{array} \right) \quad (1)$$

gegeben.

Die Differentialform (1) ist *indefinit* und vom Trägheitsindex 2. Die Nullkegel besitzen also reelle Erzeugenden. Die von einem Weltpunkt ausgehenden und dem Innengebiet seines Nullkegels angehörenden Intervalle bezeichnet man als *zeitartig*, die dem Außengebiet angehörenden als *raumartig*. Man pflegt die Vorzeichen von (1) so festzulegen, daß zeitartigen Intervallen positive und raumartigen negative Werte von ds^2 entsprechen.

Es ist dann in einem beliebigen Weltpunkt (x_1, x_2, x_3, x_4) die Koordinate x_i von zeitartigem Charakter, wenn in diesem Punkt g_{ii} einen positiven Wert besitzt und sie ist raumartig, wenn g_{ii} negativ ist. Lediglich solche Koordinatensysteme, bei denen in jedem Weltpunkt eine und dieselbe der vier Koordinaten, etwa x_4 , zeitartigen Charakter trägt und des weiteren die Differentialform

$$g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

negativ definit ist, sollen hier als *raum-zeitliche* Bezugssysteme bezeichnet werden. Wir müssen uns jedoch darüber im klaren sein, daß die Aufspaltung des Weltkontinuums in Raum und Zeit, die durch solche Bezugssysteme hergestellt wird, wie überhaupt jegliche Konstruktion einer Gleichzeitigkeit mehr oder weniger rein mathematischen Charakter trägt.

Die den frei beweglichen Massenpunkten entsprechenden Weltlinien sind die zeitartigen geodätischen Linien der *Riemannschen* Mannigfaltigkeit, also jene Geodätischen, die im Innengebiet der Nullkegel ihrer Punkte verlaufen. Die den Lichtimpulsen entsprechenden Weltlinien sind die geodätischen Nulllinien der Mannigfaltigkeit.

Bezeichnen wir den kovarianten Maßtensor des Weltkontinuums wieder mit $g_{\mu\nu}$, so ist der kovariante Krümmungstensor durch

$$R_{\alpha\lambda\mu} = -\{\iota\lambda, \varrho\} \cdot [\mu\kappa, \varrho] + \{\kappa\lambda, \varrho\} \cdot [\mu\iota, \varrho] + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\iota\mu}}{\partial x_\kappa \partial x_\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 g_{\iota\lambda}}{\partial x_\kappa \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} \right)$$

gegeben. Durch Überschiebung von $R_{\alpha\lambda\mu}$ mit dem kontravarianten Maßtensor $g^{\mu\mu}$ ergibt sich der *Einsteinsche* Tensor

$$G_{\kappa\lambda} = g^{\iota\mu} \cdot R_{\iota\kappa\lambda\mu} \quad (2)$$

Wir machen nun zur Grundlage unserer weiteren Untersuchungen das *Einsteinsche* Gravitationsgesetz für den leeren Raum

$$G_{\mu\nu} = \lambda \cdot g_{\mu\nu} \quad (3)$$

Für *Riemannsche* Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung K gilt nun die Beziehung

$$R_{\iota\kappa\lambda\mu} = K(g_{\iota\lambda} g_{\kappa\mu} - g_{\iota\mu} g_{\kappa\lambda})^1 \quad (4)$$

Aus (2) und (4) ergibt sich aber

$$\begin{aligned} G_{\kappa\lambda} &= K(g_{\iota\lambda} g_{\kappa\mu} \cdot g^{\iota\mu} - g_{\iota\mu} g_{\kappa\lambda} \cdot g^{\iota\mu}) = \\ &= K(g_{\iota\lambda} \cdot g_{\kappa}^{\iota} - 4 g_{\kappa\lambda}) = -3 K g_{\kappa\lambda}, \end{aligned}$$

so daß also die Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung K der Relation (3) genügen. Die Weltkonstante λ besitzt dabei den Wert

$$\lambda = -3 K. \quad (5)$$

Jede *Riemannsche* Mannigfaltigkeit mit der konstanten Krümmung K kann bekanntlich als *Cayley-Kleinsche* Maßbestimmung mit der Maßkonstanten K aufgefaßt werden. Wie bereits eingangs erwähnt, besitzt die Fundamentalform (1) den Trägheitsindex 2. Es gibt nun zwei *Cayley-Kleinsche* Maßbestimmungen, die dieser Bedingung genügen: die Maßbestimmung im *Außengebiet* der ovalen Hyperfläche 2. Grades und die Maßbestimmung im *Innengebiet* der ringartigen Hyperfläche 2. Grades.

Betrachten wir zunächst die *Cayley-Kleinsche* Maßbestimmung im Außengebiet einer ovalen Hyperfläche 2. Grades $\mathcal{P}$. Die geodätischen Linien der Maßbestimmung sind die Geraden und insbesondere werden die zeitartigen Geodätischen durch die $\mathcal{P}$ reell schneidenden Geraden dargestellt. Die geodätischen Nulllinien sind die $\mathcal{P}$ berührenden Geraden.

Auf den zeitartigen Geodätischen und den geodätischen Nulllinien des Weltkontinuums wird durch den Sinn des Zeitablaufes eine Orientierung festgelegt. Wie man aber leicht erkennt, ist es nicht möglich, die diese Kurven in der betrachteten Maßbestimmung repräsentierenden Geraden in widerspruchsfreier Weise zu orientieren. Legt man nämlich (Abb. 1) auf einer dieser Geraden eine Orientierung fest, so kann diese durch stetige Lageänderungen der Geraden in die entgegengesetzte Orientierung übergeführt werden.

¹ *Levi-Civita*, Der absolute Differentialkalkül, Berlin 1928, Seite 135.

Die Cayley-Kleinsche Maßbestimmung im Außengebiet einer ovalen Hyperfläche 2. Grades eignet sich also nicht zur Beschreibung des Weltkontinuums.

Nun gibt es bekanntlich zu jeder Cayley-Kleinschen Maßbestimmung eine weitere als „sphärisch“ zu bezeichnende Maßbestimmung, die mit der ersteren im Kleinen übereinstimmt, jedoch im Großen andere Zusammenhangsverhältnisse aufweist als diese.

Es sei in einem R_4 Ω eine beliebige reelle nichtausgeartete Hyperfläche 2. Grades Ψ gegeben, deren Gleichung unter Zugrundelegung eines projektiven Koordinatensystems mit den Fundamentalpunkten $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5$ und dem Einheitspunkt E

$$a_{ik} x_i x_k = 0, (a_{ik} = a_{ki}; i, k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (6)$$

sei.

Wenn wir von dem Fall, daß Ψ nullteilig ist, absehen, so zerlegt diese Hyperfläche den R_4 in zwei Teilgebiete. Wir betrachten ein beliebiges der beiden Teilgebiete und denken uns in (6) die Vorzeichen der Koeffizienten so gewählt, daß das Gleichungspolynom für die Punkte des betrachteten Teilgebietes positive Werte annimmt.

Wir betten nun den R_4 Ω in einen R_5 ein und legen in diesem ein projektives Koordinatensystem mit den Fundamentalpunkten $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5$ und einem beliebigen Ω nicht angehörenden Punkt 0_6 des R_5 fest. Als Einheitspunkt wählen wir einen beliebigen von 0_6 und E verschiedenen Punkt der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte.

Die Hyperfläche Φ des R_5 mit der Gleichung

$$a_{ik} x_i x_k - R^2 x_6^2 = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

geht durch die Hyperfläche Ψ hindurch und der Punkt 0_6 ist der Pol von Ω in bezug auf Φ . Projizieren wir die Punkte des betrachteten Teilgebietes von Ω aus 0_6 auf die Hyperfläche Φ , so entsprechen jedem dieser Punkte zwei reelle Punkte von Φ und jedem reellen Punkt von Φ ein Punkt des betrachteten Teilgebietes des R_4 .

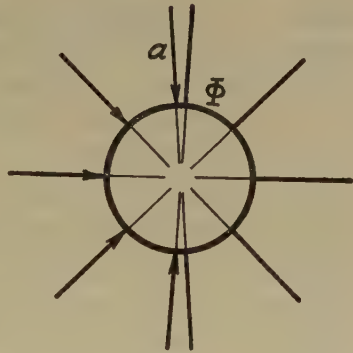


Abb. 1

Mißt man nun den $R_4 \Omega$ in der *Cayley-Kleinschen* Maßbestimmung mit dem absoluten Gebilde Ψ und der Maßkonstanten $K = 1/R^2$ aus und die Hyperfläche Φ des R_5 in jener pseudoeuklidischen Metrik des R_5 in der Φ die Sphäre mit dem Mittelpunkt O_6 und dem Radius R darstellt — sie ist durch die angegebene Bedingung in eindeutiger Weise festgelegt —, so ist die obige Zuordnung längentreu.

Will man der Maßkonstanten K der *Cayley-Kleinschen* Maßbestimmung in Ω negative Werte erteilen, so denkt man sich die Gleichung von Φ in der Form

$$-a_{ik} x_i x_k + R^2 x_6^2 = 0$$

geschrieben. Der obige Tatbestand bleibt dann erhalten, wenn man Φ in der zur obigen konjugierten pseudoeuklidischen Metrik des R_5 , in jener pseudoeuklidischen Metrik also, in der Φ die Sphäre mit dem Mittelpunkt O_6 und dem Radius iR darstellt, ausmißt und $K = -1/R^2$ setzt.

Wir setzen nun insbesondere die Hyperfläche 2. Grades Ψ in Ω als oval voraus, beziehen Ψ auf ein Polsimplex und erteilen der Gleichung dieser Hyperfläche die Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0$$

Das Gleichungspolynom nimmt dann für die Punkte des Außengebietes von Ψ positive Werte an.

Sollen nun in der *Cayley-Kleinschen* Maßbestimmung im Außengebiet von Ψ den zeitartigen Intervallen positive Werte von ds^2 entsprechen, so muß man, wie leicht einzusehen ist, der Maßkonstanten K einen negativen Wert erteilen. Gemäß dem oben Gesagten schreiben wir also die Gleichung der entsprechenden Sphäre Φ des R_5 in der Form

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 + R^2 x_6^2 = 0.$$

Führen wir im R_5 die inhomogenen Koordinaten $\frac{x_1}{x_6}, \frac{x_2}{x_6}, \frac{x_3}{x_6}, \frac{x_4}{x_6}, \frac{x_5}{x_6}$ ein und bezeichnen sie wieder bzw. mit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , so erhält die Gleichung von Φ die Gestalt

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 = -R^2. \quad (7)$$

Messen wir Φ in der Metrik des R_5 aus, die durch

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 + dx_5^2 \quad (8)$$

gegeben ist, so ist die Maßbestimmung auf der Sphäre Φ , die wir uns

längs Ψ aufgeschnitten zu denken haben, abgesehen von den Zusammenhangsverhältnissen, vollkommen identisch mit der *Cayley-Kleinschen* Maßbestimmung im Außengebiet von Ψ , wenn wir dabei die Maßkonstante $K = -1/R^2$ wählen.

Für die universelle Konstante λ ergibt sich wegen (5)

$$\lambda = -3K = \frac{3}{R^2},$$

also ein *positiver* Wert.

Die geodätischen Linien der Maßbestimmung auf Φ sind die Schnittkurven von Φ mit den Ebenen durch den Mittelpunkt der Sphäre. Insbesondere sind die zeitartigen Geodätischen die in der Gesamtheit dieser Schnittkurven enthaltenen Hyperbeln bzw. die Äste dieser Hyperbeln. Die geodätischen Nulllinien der Maßbestimmung sind die Erzeugenden von Φ . Hier ist es nun tatsächlich möglich, die zeitartigen Geodätischen und die geodätischen Nulllinien in widerspruchsfreier Weise zu orientieren.

Die betrachtete Maßbestimmung stellt bekanntlich das *de Sittersche Weltkontinuum* dar. Setzt man

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_2 &= R \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_3 &= R \sin \chi \cos \vartheta \\ x_4 &= R \cos \chi \cosh t \\ x_5 &= R \cos \chi \sinh t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

so ergibt sich aus (8) durch eine einfache Rechnung für ds^2 der Ausdruck

$$ds^2 = R^2 [-d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2) + \cos^2 \chi \cdot dt^2].$$

Das Koordinatensystem $(\chi, \vartheta, \varphi, t)$ stellt also ein *de Sittersches Bezugssystem* des Weltkontinuums dar. Solche Bezugssysteme sind zwar *stationär*², stellen aber bekanntlich nicht das gesamte *de Sittersche* Weltkontinuum dar. Aus (9) ergibt sich nämlich

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \sin^2 \chi \leq R^2.$$

Es sollen nun *raum-zeitliche* Bezugssysteme des *de Sitterschen* Weltkontinuums von ganz anderer Art betrachtet werden. Setzt man

² Sogar *statisch*; A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, Berlin 1925, Seite 112.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \cosh t \cdot \sin \chi \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ x_2 &= R \cosh t \cdot \sin \chi \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ x_3 &= R \cosh t \cdot \sin \chi \cdot \cos \vartheta \\ x_4 &= R \cosh t \cdot \cos \chi \\ x_5 &= R \sinh t \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wobei für die Parameter $\chi, \vartheta, \varphi, t$ die folgenden Grenzen gelten

$$0 \leq \chi < \pi; \quad 0 \leq \vartheta < \pi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad -\infty < t < \infty,$$

so genügen die durch (10) dargestellten Koordinatenwerte x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 der Gleichung (7), wobei aber zum Unterschied von (9) die *gesamte* Hyperfläche Φ erfaßt wird.

Aus (8) und (10) ergibt sich

$$ds^2 = R^2[-(d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot d\vartheta^2 + \sin^2 \chi \cdot \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2) \cosh^2 t + dt^2] \quad (11)$$

wobei für $\chi, \vartheta, \varphi, t$ die obigen Grenzen gelten.

Das betrachtete Bezugssystem ist in dem eingangs erwähnten Sinne *raumzeitlicher* Natur. Es ist zwar nicht *stationär*³, umfaßt aber zum Unterschied von den *de Sitterschen* Bezugssystemen das *gesamte de Sittersche* Weltkontinuum.

Wie man aus (10) erkennt, sind die Zeitlinien des Bezugssystemes $(\chi, \vartheta, \varphi, t)$, die Kurven also, für welche die drei räumlichen Koordinaten χ, ϑ, φ konstante Werte besitzen, zugleich auch die zeitartigen Geodätischen des Bezugssystemes. Es kann also an jeder „*Stelle*“ χ, ϑ, φ des Bezugssystemes ein freibeweglicher Massenpunkt im Zustand der Ruhe verharren.

Das System der Massenpunkte, die im betrachteten Bezugssystem ruhen, weist nun, wie wir sehen werden, *projektive* Eigenschaften auf.

Wir konstatieren zunächst, daß eine Aufspaltung des *de Sitterschen* Weltkontinuums in „Raum“ und „Zeit“ von der Art, wie sie durch das Bezugssystem $(\chi, \vartheta, \varphi, t)$ hergestellt wird, auf ∞^4 Arten erfolgen kann. In (7) gehört die x -Achse einer beliebigen der ∞^4 im Innengebiet von Φ liegenden Durchmessergeraden dieser Sphäre des R_5 an. Jede Wahl der x_5 -Achse ergibt unendlich viele Bezugssysteme $(\chi, \vartheta, \varphi, t)$, die aber alle dieselbe Aufspaltung des Weltkontinuums herstellen.

Wir gehen nun von einer beliebigen im Innengebiet von Φ liegenden Durchmessergeraden s dieser Sphäre aus und betrachten das System

³ Es ist scheinbar nicht möglich, das *gesamte de Sittersche* Weltkontinuum durch ein stationäres Bezugssystem zu erfassen.

der Massenpunkte, deren Weltlinien in Ebenen liegen, die durch s hindurchgehen⁴.

Zwei Massenpunkte, deren Weltlinien derselben Ebene angehören, also die beiden Äste ein und derselben Hyperbel darstellen, sollen als diametral bezeichnet werden. Der zu einem beliebigen Massenpunkt des Systems diametrale gehört ebenfalls dem System an und wir wollen nun je zwei diametrale Massenpunkte des Systemes als identisch ansehen.

Wir betrachten nun drei beliebige Massenpunkte A, B, C des Systems, von denen keine zwei zueinander diametral sind, bezeichnen ihre Weltlinien bzw. mit a, b, c und die Ebenen, denen diese Kurven angehören, mit α, β, γ . Wie man leicht erkennt, liegen die Massenpunkte A, B, C dann und nur dann in dem eingangs definierten Sinne auf einer „Geraden“, wenn ihre Weltlinien a, b, c und damit auch ihre Ebenen α, β, γ einem R_3 angehören.

Liegen nämlich die Massenpunkte A, B, C auf einer Geraden, so werden ihre Weltlinien a, b, c und somit deren Ebenen α, β, γ von Weltlinien von Lichtimpulsen, also von Geraden geschnitten, die zu s windschief sind, so daß also a, b, c einem R_3 angehören.

Sind umgekehrt a, b, c und damit α, β, γ in einem R_3 Γ enthalten, und bezeichnen wir die Schnittfläche von Γ mit der Sphäre Φ mit $\bar{\Phi}$, so sind a, b, c die Schnittlinien von $\bar{\Phi}$ mit den Ebenen α, β, γ . Die Erzeugenden von $\bar{\Phi}$ sind Weltlinien von Lichtimpulsen und da jede von ihnen, jede der drei Weltlinien a, b, c schneidet, liegen die Massenpunkte A, B, C auf einer „Geraden“.

Die durch die Massenpunkte A, B, C hindurchgehende „Gerade“ g besteht dann aus der Gesamtheit der Massenpunkte des betrachteten Systems, deren Weltlinien dem R_3 Γ angehören. Wir ordnen nun der Geraden g den R_3 Γ zu und denken uns für alle Geraden des Systemes die entsprechende Zuordnung getroffen.

Unter den „Ebenen“ verstehen wir die Gesamtheiten von Massenpunkten unseres Systemes, deren Weltlinien je einer und derselben durch die Gerade s hindurchgehenden Hyperebene des R_5 angehören. Jeder „Ebene“ des Massensystemes ordnen wir die entsprechende Hyperebene des R_5 zu.

⁴ In die entsprechende *Cayley-Kleinsche* Maßbestimmung übertragen bedeutet dies, daß die Weltlinien der Massenpunkte sämtlich durch einen und denselben im Innengebiet der absoluten Hyperfläche Ψ liegenden Weltpunkt hindurchgehen.

Ordnen wir schließlich noch jedem Massenpunkt des betrachteten Systemes die Ebene seiner Weltlinie zu, so wird dadurch zwischen den „Punkten“, „Geraden“ und „Ebenen“ des Massensystems und den Ebenen, den R_3 und den Hyperebenen des R_5 , die durch die Gerade s hindurchgehen, eine umkehrbar eindeutige Beziehung hergestellt.

Aus der Art dieser Zuordnung folgt nun unmittelbar, daß die „Punkte“, „Geraden“ und „Ebenen“ des betrachteten Massensystemes den Gesetzen der projektiven Geometrie (des Raumes) genügen.

Jedes System von Massenpunkten, die in einem raumzeitlichen Bezugssystem solcher Art, wie das durch (16) festgelegte, ruhen, stellt also ein projektives Massensystem dar.

Es soll nun die zweite der beiden als Weltkontinuen in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung herangezogen werden — die Cayley-Kleinsche Maßbestimmung nämlich im Innengebiet einer ringartigen Hyperfläche 2. Grades Ψ des R_4 . Wie wir gesehen haben, ergibt sich ja auch hier für ds^2 eine quadratische Differentialform vom Trägheitsindex 2.

Die Geodätischen der Maßbestimmung sind die Geraden und insbesondere sind die zeitartigen Geodätischen die zur Gänze im Innengebiet von Ψ liegenden Geraden; die letzteren sind geschlossen und von endlicher Länge. Die geodätischen Nulllinien sind die im Innengebiet von Ψ liegenden Tangenten dieser Hyperfläche. Wie leicht einzusehen ist, kann man die zeitartigen Geodätischen und die geodätischen Nulllinien in widerspruchsfreier Weise (auf zwei verschiedene Arten natürlich) orientieren und auf jeder dieser Geraden ist die Orientierung bestimmt, sobald sie auf einer derselben festgelegt ist.

Wir betrachten nun von einem beliebigen Weltpunkt 0 ausgehend das System der Massenpunkte, deren Weltlinien durch 0 hindurchgehen⁵ und wollen uns die hier herrschenden Verhältnisse an dem Bilde eines dreidimensionalen Weltkontinuums klar machen.

Ist dann Ψ (Abb. 2) die ringartig vorausgesetzte absolute Fläche der Maßbestimmung, so wählen wir eines der beiden (im dreidimensionalen Falle gleichberechtigten) Teilgebiete aus, in welche der R_3 durch Ψ zerlegt wird und nehmen darin einen beliebigen Weltpunkt 0 an. Die zeitartigen Geodätischen sind die Geraden, die zur Gänze in dem betrachteten Teilgebiet des R_3 liegen und die geodätischen Nulllinien

⁵ Es muß dabei natürlich eine Umgebung des Weltpunktes 0 von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

die Tangenten von Ψ , die jenem Gebiet angehören. Beide Arten von Geraden denken wir uns im Sinn der wachsenden Zeit orientiert.

Wir betrachten nun das System der Massenpunkte, deren Weltlinien durch 0 hindurchgehen. Sind dann A, B, C drei Massenpunkte des Systemes, deren Weltlinien a, b, c einer Ebene angehören, so liegen A, B, C , wie unmittelbar klar ist, in dem eingangs definierten Sinne auf einer Geraden. Die Verbindungsebene der Geraden a, b, c werde mit ε und die Schnittkurve von ε mit der Quadrik Ψ mit u bezeichnet. Stellt dann A' den Massenpunkt A zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt dar, so hat eine der beiden Tangenten von A' an u die Eigenschaft, daß von ihren Schnittpunkten $A' B' C'$ bzw. mit a, b, c der Punkt A' im Sinne der auf jener Tangente festgelegten Orientierung der letzte ist. Für einen Beobachter im Massenpunkt A werden sich also bei der Betrachtung der Massenpunkte B und C diese beiden Punkte in dem

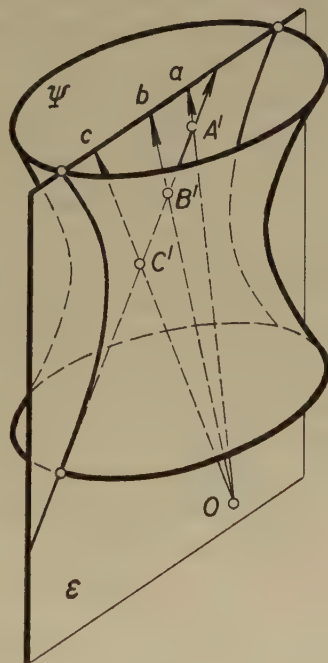


Abb. 2

Augenblick, für welchen der Massenpunkt A durch A' dargestellt wird, decken. Da nun A' ein beliebiger Punkt der Weltlinie a von A ist, so wird dies also „ständig“ der Fall sein, womit die obige Behauptung bewiesen wäre.

Der durch die Punkte A, B, C unseres Massensystems hindurchgehenden „Geraden“ ordnen wir die Ebene ε zu und denken uns für jede „Gerade“ unseres Systemes die analoge Zuordnung getroffen. Ordnen wir weiters jedem Massenpunkt unseres Systemes seine Weltlinie zu, so besteht zwischen den „Punkten“ und „Geraden“ des Systemes der Massenpunkte und den Geraden und Ebenen des Bündels 0 eine umkehrbar eindeutige Beziehung. Aus der Art dieser Zuordnung ergibt sich unmittelbar, daß die „Punkte“ und „Geraden“ des betrachteten Massensystems den Gesetzen der projektiven Geometrie (der Ebene) gehorchen.

Da nun im Vierdimensionalen offenbar vollkommen analoge Verhältnisse bestehen, können wir den Satz aussprechen: *In dem durch die Cayley-Kleinsche Maßbestimmung im Innengebiet einer ringartigen Hyperfläche 2. Grades dargestellten Weltkontinuum, ist jedes System von Massenpunkten, deren Weltlinien durch einen und denselben Weltpunkt hindurchgehen, projektiv.*

Freilich müssen, da ja die Weltlinien der Massenpunkte des betrachteten Systemes durchwegs im Innengebiet des Nullkegels des Schnittpunktes der Weltlinien der Massenpunkte liegen, zur ausnahmslosen Gültigkeit der Gesetze der projektiven Geometrie neben den materiell realisierbaren Grundelementen auch noch *ideale* Elemente herangezogen werden.

Das hier betrachtete Weltkontinuum läßt sich, wie wir sehen werden, zum Unterschied vom *de Sitterschen* Weltkontinuum zur Gänze durch ein *stationäres* Bezugssystem erfassen. Um zu einem solchen zu gelangen, benützen wir wieder die Beziehung zwischen der *Cayley-Kleinschen* Maßbestimmung in bezug auf das absolute Gebilde Ψ und der entsprechenden sphärischen Maßbestimmung.

Wir beziehen die Hyperfläche Ψ auf ein Polsimplex und erteilen ihrer Gleichung die Form

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0. \quad (12)$$

Das Gleichungspolynom nimmt dann für die Punkte des Innengebietes von Ψ positive Werte an. Sollen weiters in der *Cayley-Kleinschen* Maßbestimmung in bezug auf Ψ den zeitartigen Intervallen positive Werte von ds^2 entsprechen, so müssen wir, wie man leicht erkennt, der Maßkonstanten K einen positiven Wert erteilen. Gemäß früheren Ausführungen setzen wir also $K = 1/R^2$ und schreiben die Gleichung der Sphäre Φ des R_5 in der Form

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - R^2 x_6^2 = 0.$$

Geht man im R_5 auf die inhomogenen Koordinaten $\frac{x_1}{x_6}, \frac{x_2}{x_6}, \frac{x_3}{x_6}, \frac{x_4}{x_6}, \frac{x_5}{x_6}$ über und bezeichnet sie wieder bzw. mit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , so erhält die Gleichung von Φ die Form

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = R^2. \quad (13)$$

Mißt man nun Φ in der Metrik des R_5 aus, die durch

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 \quad (14)$$

gegeben ist, so ist die Maßbestimmung auf Φ abgesehen von den Zusammenhangsverhältnissen vollkommen identisch mit der *Cayley-Klein*-schen Maßbestimmung im Innengebiet von Ψ . Für die Weltkonstante λ ergibt sich aus (5)

$$\lambda = -3K = -\frac{3}{R^2}$$

also ein *negativer* Wert.

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \sinh \chi \\ x_2 &= R \cosh \chi \sinh \vartheta \\ x_3 &= R \cosh \chi \cosh \vartheta \sinh \varphi \\ x_4 &= R \cosh \chi \cosh \vartheta \cosh \varphi \sin t \\ x_5 &= R \cosh \chi \cosh \vartheta \cosh \varphi \cos t \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wobei für die Parameter $\chi, \vartheta, \varphi, t$ die Grenzen

$$-\infty < \chi < \infty; \quad -\infty < \vartheta < \infty; \quad -\infty < \varphi < \infty; \quad -\pi \leq t < \pi$$

gelten, so genügen die durch (15) dargestellten Koordinatenwerte der Gleichung (13), wobei die gesamte Sphäre Φ umfaßt wird. Aus (14) und (15) ergibt sich nun für ds^2 der Ausdruck

$$ds^2 = R^2[-d\chi^2 - \cosh^2 \chi (d\vartheta^2 - \cosh^2 \vartheta \cdot d\varphi^2) + \cosh^2 \chi \cosh^2 \vartheta \cosh^2 \varphi \cdot dt^2]. \quad (16)$$

Projiziert man die Sphäre Φ aus ihrem Mittelpunkt auf das Innengebiet von Ψ , so entspricht je zwei diametralen Punkten von Φ derselbe Punkt des Innengebietes von Ψ . Um zu einer eindeutigen Darstellung des betrachteten Weltkontinuums zu gelangen, beschränken wir unter Beibehaltung der Grenzen für die *raumartigen* Parameter χ, ϑ, φ den *zeitartigen* Parameter t auf das Intervall

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

Wir müssen dabei je zwei Weltpunkte mit den Koordinaten

$$(\chi, \vartheta, \varphi, -\frac{\pi}{2}) \text{ und } (\chi, \vartheta, \varphi, +\frac{\pi}{2})$$

als identisch betrachten.

Das Bezugssystem $(\chi, \vartheta, \varphi, t)$ ist, wie man sieht, *stationär*. Des weiteren umfaßt das betrachtete Weltkontinuum wegen (17) nur endliche Werte der Zeit; es stellt eine Welt vor, in der es keine Ewigkeit gibt.

Betrachten wir nun nochmals in unserem Weltkontinuum einen frei sich bewegenden Massenpunkt. Seine Weltlinie ist eine Gerade; sie ist geschlossen und besitzt die Länge

$$L = \frac{\pi}{\sqrt{K}} \quad (18)$$

L ist die Dauer der Eigenzeit, die der Massenpunkt benötigt, um seine Weltlinie zu durchmessen.

Aus (5) und (18) ergibt sich für die Weltkonstante λ der Wert

$$\lambda = -\frac{3\pi^2}{L^2}.$$

Über windschiefe Flächen mit konischer Zentraltorse

Von

Josef Krames, Wien

Prof. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 17. Oktober 1960)

Nr. 1. In seiner im Jahre 1924 erschienenen Abhandlung „Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert“ [6] untersuchte der Verfasser unter den im Titel genannten Flächen auch eine achsial-symmetrische *Cayleysche Fläche* Θ_{III} mit bemerkenswerten Eigenschaften. Ihre *Kehllinie* (Striktionslinie) ist ein schiefer kubischer Kreis. In dem Buche „Konstruktive Behandlung der Regelflächen“ [12] zeigte er ferner, daß Θ_{III} in allen ihren Erzeugenden *gleichen Drall* besitzt (siehe [12], S. 242), wie dies für Drehhyperboloide und windschiefe Schraubflächen zutrifft. Andere spezielle windschiefe Flächen mit konstantem Drall wurden bereits vom Jahre 1860 angefangen von französischen Geometern (vgl. [12], S. 85, Fußn. 2) und später von *R. Edlinger* [5] in Betracht gezogen.

Nachdem der Verfasser vor wenigen Jahren unter Hinweis auf die Fläche Θ_{III} die Frage nach weiteren windschiefen Flächen konstanten Dralles, insbesondere nach algebraischen, aufgeworfen hatte, entwickelte *H. Brauner* vorerst allgemeine Eigenschaften und Erzeugungsarten solcher Flächen (siehe [1]). Sodann konnte er nachweisen, daß die oben erwähnte Cayleysche Fläche Θ_{III} bereits die einzige konstant gedrahlte windschiefe Fläche dritten Grades darstellt [2]; dabei hat man sich jedoch — wie dies auch im folgenden geschieht — auf Flächen mit einer stetigen Schar reeller Strahlen zu beschränken.

Anschließend fand *H. Brauner* die einzige in einem Strahlnetz enthaltene Fläche vierten Grades (VIII. Art nach *R. Sturm*, vgl. [12], Nr. 42—45) mit gleichem Drall in allen Erzeugenden [3], ferner auch

eine Familie von ∞^1 windschiefen Flächen vierten Grades III. Art von derselben Beschaffenheit. Dieser Familie gehören die Cayleysche Fläche $\mathcal{O}_{III}$ und die soeben erwähnte Netzfläche als Grenzfälle an (siehe [4]).

In der vorliegenden Arbeit werden vorerst einige gemeinsame Eigenschaften jener windschiefen Flächen abgeleitet, *die einen Kegel mit eigentlichem Scheitel zur Zentraltorse* haben. Im besonderen wird der Zusammenhang zwischen dem Zentralkegel, der Kehllinie und den verschiedenen Werten des Dralles einer solchen Fläche klargestellt. Ist beispielsweise die mit dem Zentralkegel verebnete Kehllinie oder dieser Kegel bereits festgelegt, dann kann das andere dieser beiden Gebilde immer derart gestaltet werden, daß die windschiefe Fläche eine beliebig vorgegebene Drallverteilung, insbesondere in allen Erzeugenden gleichen Drall aufweist. Flächen der zuletzt genannten Art können danach in unbegrenzter Zahl angegeben und mannigfache Beispiele näher behandelt werden. Interessante Eigenschaften besitzen vor allem jene windschiefen Flächen, deren Zentraltorse ein *Drehkegel* ist. Diese Flächen sind genau dann konstant gedraht, wenn ihre Kehllinie beim Verebnen dieses Kegels in eine *rationale Kurve vierter Ordnung* einer bestimmten einparametrischen Schar übergeht. Merkwürdigerweise ist dabei die betreffende windschiefe Fläche im allgemeinen transzendent, nur in diskret verteilten Sonderfällen algebraisch. Einige bereits bekannte Ergebnisse erscheinen nun in einem neuen Licht. Nebenher ergibt sich auch ein einfacher Zusammenhang zwischen der *Kappakurve* und der *Strophoide*.

Nr. 2. Die Erzeugenden e einer windschiefen Fläche gehen bekanntlich in ein Büschel paralleler Geraden $e^\vee$ über, wenn man sie mit ihren Zentralebenen starr verbunden hält und die von diesen Ebenen umhüllte Zentraltorse verebnet (siehe etwa [12], Nr. 23, Satz 7). Wir betrachten in der Folge solche windschiefe Flächen Φ , deren sämtliche Zentralebenen durch einen festen, im Endlichen gelegenen Punkt S gehen, also einen Kegel Σ berühren. In der Verebnung dieses „Zentralkegels“ wählen wir den S entsprechenden Punkt $S^\vee$ als Nullpunkt O eines Polarkoordinatensystems $\{r, \varphi\}$ und können die Abszissenachse ($\varphi = 0$) unbeschadet der Allgemeinheit parallel zu den verebneten Erzeugenden $e^\vee$ annehmen (siehe Abb. 1).

Die aus der Kehllinie k von Φ beim Verebnen von Σ hervorgehende Kurve $k^\vee$ sei gegeben durch die Polargleichung:

$$r = r(\varphi). \quad (1)$$

Von $r(\varphi)$ und den übrigen hier verwendeten Funktionen wird vorausgesetzt, daß sie hinreichend oft differenzierbar sind.

Nr. 3. Der beim Zentralkpunkt E einer Erzeugenden e von Φ auftretende *Kehlwinkel*, d. i. der Schnittwinkel σ zwischen der Kehllinie k und e , spielt in der von *E. Kruppa* wesentlich weiter entwickelten natürlichen Geometrie der Strahlflächen eine wichtige Rolle (siehe vor allem [10], § 54). *Kruppa* nennt diese Differentialinvariante σ die „Striktion“ von Φ in e . Sie zeigt sich in der Verebnung von Σ als Winkel zwischen e^v und der Tangente t^v an k^v im entsprechenden Punkt E^v . Da die Erzeugenden f des Zentralkegels Σ beim Verebnen in die Radialstrahlen f^v durch $S^v = O$ übergehen, ist der Winkel, den zusammengehörige Erzeugenden e und f miteinander bilden, gleich der Amplitude φ von f^v (Abb. 1). φ gibt zugleich die Bogenlänge des sphärischen Bildes von Σ auf der Einheitskugel an.

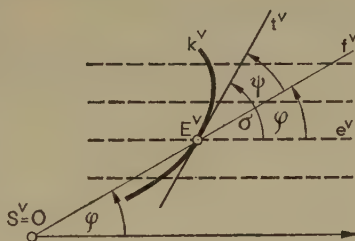


Abb. 1

Wir bezeichnen ferner die Bogenlänge des sphärischen Bildes des Polarkegels von Σ mit u_2 und erhalten als konische Krümmung von Σ :

$$\kappa_f = \frac{d u_2}{d \varphi}. \quad (2)$$

Ist neben der Kurve k^v (Gl. 1) auch die natürliche Gleichung

$$\kappa_f = \kappa_f(\varphi) \quad (3)$$

des Zentralkegels Σ bekannt, dann ergibt sich der Drall p der windschiefen Fläche Φ nach einer vom Verfasser vor kurzem nachgewiesenen Formel (siehe [9]) als Funktion von φ in der Form:

$$p(\varphi) = \frac{r(\varphi) \sin \sigma}{\kappa_f(\varphi) \sin \varphi \sin (\varphi - \sigma)}. \quad (4)$$

Die Vorzeichen von p und κ_f sind dabei im Sinne der von *E. Kruppa* (in [10], § 92 bzw. § 12) angegebenen Regeln bestimmt.

Nr. 4. Für den Winkel $\psi = \sigma - \varphi$ einer Tangente t^v an die Kurve k^v gegen den Radialstrahl f^v , auf dem der zugehörige Berührungspunkt E^v liegt, gilt bekanntlich (vgl. Abb. 1):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}.$$

Danach geht (4) über in

$$p(\varphi) = - \frac{r(\varphi)}{\kappa_f(\varphi)} (\cot \varphi + \cot \psi) \quad (5)$$

oder

$$p(\varphi) = - \frac{1}{\kappa_f(\varphi)} (\cot \varphi \, r(\varphi) + r'(\varphi)). \quad (6)$$

Durch den Zentralkegel Σ und die Polargleichung der verebneten Kehllinie k^* (Gl. 3 bzw. 1) ist mithin der Drall der windschiefen Fläche Φ in ihren Erzeugenden e bereits bestimmt, und zwar überall eindeutig, wo die Funktionen $r(\varphi)$ und $\kappa_f(\varphi)$ eindeutig sind.

In gleicher Weise wird auch die von φ abhängige konische Krümmung κ_f von Σ festgelegt, sobald die verebnete Kehllinie k^* und die verschiedenen Werte des Dralles von Φ durch die Funktionen $r(\varphi)$ bzw. $p(\varphi)$ gegeben sind.

Nr. 5. Werden hingegen die Funktionen $p(\varphi)$ und $\kappa_f(\varphi)$ vorgeschrieben, dann kann die mit Σ verebnete Kehllinie k^* im allgemeinen aus einer Schar von ∞^1 Kurven beliebig herausgegriffen werden. Denn Gl. 6 bildet nun für k^* eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Wir schreiben diese in der Form:

$$r'(\varphi) + \cot \varphi \, r(\varphi) + F(\varphi) = 0, \quad (7)$$

worin $F(\varphi) \equiv p(\varphi) \kappa_f(\varphi)$ zu setzen ist. Ihr allgemeines Integral lautet:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi} \left(C - \int \sin \varphi \, p(\varphi) \kappa_f(\varphi) d\varphi \right), \quad C = \text{konst.} \quad (8)$$

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen im

Satz 1: Eine windschiefe Fläche Φ besitze eine konische (jedoch nicht zylindrische) Zentraltorse Σ und eine Kehllinie k , die durch Verebnung von Σ in die Kurve k^* mit der Polargleichung $r = r(\varphi)$ übergeht, wobei $\varphi = 0$ die Richtung der gemeinsam mit Σ und k verebneten Erzeugenden e^* von Φ hat, und der Nullpunkt O ($r = 0$, $\varphi = 0$) im Scheitel S^* der Verebnung von Σ liegt. Bezeichnen ferner die ebenfalls von φ abhängigen Größen p und κ_f den Drall von Φ in den Erzeugenden e bzw. die konische Krümmung von Σ in den entsprechenden Erzeugenden f , dann ist mit der Angabe von je zwei der drei Funktionen $r(\varphi)$, $p(\varphi)$ und $\kappa_f(\varphi)$ jedesmal auch die dritte nach Gleichung 6 oder 8 bestimmt. Sind insbesondere $p(\varphi)$ und $\kappa_f(\varphi)$ bekannt, so kann die Kurve k^* (abgesehen von der Wahl der Ein-

heitsstrecke) einer bestimmten einparametrischen Schar beliebig entnommen werden.

Von diesem Satz wird in den folgenden Abschnitten verschiedentlich Gebrauch gemacht. Dabei soll von den trivialen Sonderfällen $r(\varphi) \equiv 0$ oder $\equiv \infty$ (d. h. Φ ist ein *Kegel* bzw. ein *Zylinder*) abgesehen werden, ebenso von der Annahme $\kappa_i \equiv 0$ oder $\equiv \infty$ (Φ eine *ebene Strahlschar* bzw. Σ ein *Zylinder* oder ein *Ebenenbüschel*). Demnach bleiben hier auch alle windschiefen Flächen mit „*zylindrischer*“ Zentraltorse (vgl. [12], Nr. 22, Satz 3) außer Betracht, insbesondere die „*konoidalen Flächen*“, deren Erzeugenden zu einer Richtebene ϱ parallel sind (siehe [12], Nr. 16, sowie [9], Nr. 4, c). Unter den letztgenannten Flächen hat H. Brauner die *konstant gedrahten schiefen Konoide* (mit einer Leitgeraden im Endlichen, deren Neigungswinkel gegen $\varrho \neq \frac{\pi}{2}$, $\neq 0$ ist), bereits als gewisse *Affinverwandte der Wendelfläche* festgestellt (siehe [3], 2, Satz 3).

Da der Drall einer konoidalen Fläche (nach [9], Nr. 4, c) $p = r_i \operatorname{tg} \sigma$ ist, wobei r_i den (endlichen) Hauptkrümmungsradius des Zentralzylinders im Zentralpunkt der betreffenden Erzeugenden bezeichnet, ergibt sich ohne weiters der

Satz 2: *Die geraden offenen Strahlschraubflächen sind die einzigen konoidalen Flächen, die konstanten Drall und einen Drehzylinder zur Zentraltorse haben.*

Wir nennen fortan nur solche Zentraltorsen „*konisch*“, deren Scheitel kein Fernpunkt ist.

Nr. 6. Gilt für eine Strahlfläche Φ mit konischer Zentraltorse $p(\varphi) \equiv 0$, so folgt aus Gl. 8:

$$r = \frac{C}{\sin \varphi}. \quad (9)$$

Dies sagt aus, daß die verebnete Kehllinie $k^\vee$ eine zu $\varphi = 0$ parallele Gerade und k selbst eine *geodätische Linie* von Σ , also auch von Φ ist. Wäre umgekehrt $k^\vee$ eine nicht durch den Nullpunkt $O = S^\vee$ gehende Gerade, dann würde die Funktion $p(\varphi)$ in Gl. 8 zufolge Gl. 9 genau dann identisch verschwinden, wenn $k^\vee$ die Richtung der verebneten Erzeugenden $e^\vee$ von Φ hätte. Daraus folgt:

Satz 3: *Damit eine Strahlfläche Φ mit konischer Zentraltorse Σ abwickelbar sei, ist notwendig, jedoch nicht hinreichend, daß ihre Kehllinie k eine geodätische Linie von Σ (und Φ) ist.*

Dieser Satz gilt übrigens auch unabhängig von der Gestalt der Zentraltorse, da jede abwickelbare Fläche mit nicht ausgearteter Gratlinie k die rektifizierende Torse von k zur Zentraltorse hat. Hiezu sei noch bemerkt, daß es stets ∞^1 windschiefe Flächen gibt, die mit der im Satz 3 genannten Strahlfläche die Kehllinie und den Zentralkegel gemeinsam haben (siehe etwa [12], Nr. 23, Satz 8, 8a und 11).

Nr. 7. Unter den windschiefen Flächen Φ mit einer konischen Zentraltorse Σ sollen jetzt jene aufgesucht werden, die in allen Erzeugenden e den gleichen Drall p^0 besitzen. Für die Flächen dieser Art ist bloß in Nr. 5, Gl. 7, 8, die Funktion $p(\varphi) \equiv p^0$ zu setzen. Wird sodann beispielsweise die Polargleichung $r = r(\varphi)$ der verebneten Kehllinie k' vorgeschrieben, dann muß der Zentralkegel Σ nach Gl. 7 der natürlichen Gleichung genügen:

$$\kappa_f(\varphi) = -\frac{1}{p^0} \left(\cot \varphi \, r(\varphi) + r'(\varphi) \right). \quad (10)$$

Ist hingegen die natürliche Gleichung $\kappa_f = \kappa_f(\varphi)$ des Zentralkegels Σ bekannt oder gegeben, dann weist die windschiefe Fläche Φ genau dann den konstanten Drall p^0 auf, sobald die Kehllinie k von Φ nach dem Verebnen von Σ die Polargleichung erhält (vgl. Gl. 8):

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi} \left(C - p^0 \int \sin \varphi \, \kappa_f(\varphi) \, d\varphi \right), \quad C = \text{konst.} \quad (11)$$

Somit gilt der

Satz 4: a) Eine windschiefe Fläche Φ mit konischer (nicht zylindrischer) Zentraltorse Σ besitzt dann und nur dann in allen Erzeugenden e den gleichen Drall p^0 , wenn die konische Krümmung κ_f von Σ mit der Polargleichung der (mit Σ) verebneten Kehllinie k' von Φ gemäß Gl. 10 zusammenhängt.

b) Eine windschiefe Fläche Φ mit vorgeschriebener konischer Zentraltorse Σ ist dann und nur dann konstant gedreht, wenn die Polargleichung der Kurve k' , die aus der Kehllinie k von Φ beim Verebnen von Σ hervorgeht, der Differentialgleichung (10) entspricht.

In beiden Fällen sind das Koordinatensystem und die Funktion $\kappa_f(\varphi)$ der konischen Krümmung von Σ wie im Satz 1 beschrieben festzulegen.

Auf Grund dieser Ergebnisse lassen sich beliebig viele konstant gedrehte windschiefe Flächen (mit konischer Zentraltorse) leicht angeben. Davon werden in dieser Mitteilung einige hervorstechende Sonderfälle etwas ausführlicher besprochen.

Nr. 8. Als erstes Illustrationsbeispiel zu Satz 4 betrachten wir jene windschiefen Flächen Φ , deren Kehllinie k beim Verebnen des Zentralkegels Σ von Φ in den Kreis $k^\vee$ mit der Polargleichung

$$r(\varphi) = K \sin \varphi \quad (K = \text{konst}) \quad (12)$$

übergeht. Damit eine solche Fläche Φ den konstanten Drall p^0 aufweist, muß Σ nach Gl. 10 die natürliche Gleichung haben:

$$\kappa_f(\varphi) = B \cos \varphi \quad (B = -\frac{2K}{p^0}, \quad B \neq 0, \neq \infty). \quad (13)$$

Setzen wir umgekehrt voraus, daß der Zentralkegel Σ von Φ einer natürlichen Gleichung von der Form (13) entspricht, so besitzt Φ wegen Gl. 11 und 13 genau dann in allen Erzeugenden den gleichen Drall

$$p^0 = -\frac{2K}{B}, \quad (14)$$

sobald die Kehllinie k in der Verebnung von Σ der Gleichung genügt:

$$r(\varphi) = \frac{C}{\sin \varphi} + K \sin \varphi \quad (C = \text{konst}), \quad (15)$$

oder

$$y(x^2 + y^2) - Cx^2 - (C + K)y^2 = 0. \quad (16)$$

Demnach ist $k^\vee$ eine zur y -Achse *symmetrische Fußpunktkurve der Parabel*, im Besonderen eine *Zissoide* ($C = -K$) oder eine *Strophoide* ($2C = -K$), und für $C = 0$ zerfällt $k^\vee$ in die x -Achse und den Kreis $x^2 + y^2 - Ky = 0$ (siehe Gl. 12). Vom letztgenannten Sonderfall wurde oben ausgegangen.

Jede der mit Gl. 13, 15 oder 16 gekennzeichneten windschiefen Flächen ist offenbar *transzendent* oder *algebraisch*, je nachdem dies für ihren Zentralkegel Σ zutrifft. Wir gehen auf diese besonderen Kegel weiter unten (Nr. 10) noch näher ein.

Wäre in Gl. 15 die Konstante $K = 0$, dann ginge $k^\vee$ in eine zu $\varphi = 0$ parallele Gerade und k im Raum in eine *geodätische Linie* von Σ (und Φ) über. In diesem Fall hat Φ wegen Gl. 14 den konstanten Drall $p^0 = 0$, ist also abwickelbar (siehe Nr. 6). Umgekehrt kann für jede windschiefe Fläche Φ mit Zentralkegel Σ und geodätischer Kehllinie k in der Verebnung von Σ die Achse $\varphi = 0$ immer parallel zur Geraden $k^\vee$ ($r = C : \sin \varphi$) gewählt werden. Da sodann die Annahme $p = \text{konst} = p^0$ nach Nr. 7, Gl. 10, zur Folge hätte: $\kappa_f \equiv 0$, gilt ferner (vgl. oben Nr. 6, Satz 3, und Nr. 5, Satz 2):

Satz 5: *Es gibt keine windschiefe Fläche mit geodätischer Kehllinie und konstantem Drall, deren Zentraltorse ein Kegel mit dem Scheitel im Endlichen ist.*

Hiezu sei ergänzend bemerkt, daß die konstant gedrahten windschiefen Flächen, deren Kehllinie geodätisch ist, mit den *Mindingschen Biegungsflächen der Drehhyperboloide* identisch sind (vgl. hierzu [1], Nr. 12).

Nr. 9. Besitzt eine windschiefe Fläche Φ eine konische Zentraltorse Σ , und geht die Kehllinie k von Φ beim Verebnen von Σ in einen Kreis k' über, dessen Mitte im verebneten Scheitel $S' = O$ von Σ liegt, so gilt:

$$r(\varphi) = \text{konst} = r^0 \quad (r^0 \neq 0) \quad \text{und} \quad r' \equiv 0,$$

und es folgt aus Gl. 6:

$$p(\varphi) = - \frac{r^0 \cot \varphi}{\kappa_j(\varphi)}. \quad (17)$$

Hier ist die Kehllinie k zugleich die Schnittkurve von Σ mit der Kugel, die den Scheitel S von Σ zum Mittelpunkt und den Halbmesser r^0 hat. Diese Kugel schneidet aus Φ noch eine zweite Kurve aus (die nur dann mit k zusammenfällt, wenn Σ ein Drehkegel ist; siehe später).

Damit eine windschiefe Fläche dieser Art im Besonderen *konstanten Drall* $p = p^0 \neq 0$ besitzt, ist wegen Gl. 10 notwendig und hinreichend, daß ihr Zentralkegel Σ der natürlichen Gleichung genügt:

$$\kappa_j(\varphi) = C \cot \varphi, \quad C = \text{konst} = - \frac{r^0}{p^0}. \quad (18)$$

Auf die Existenz derartiger windschiefer Flächen konstanten Dralles wurde der Verfasser bereits vor 30 Jahren aufmerksam, als er Verallgemeinerungen der von ihm entdeckten *Strahlfläche dritten Grades* Θ_1 mit einem Kreis als Kehllinie untersuchte (vgl. [6], Nr. 7, oder [12], Nr. 40, A). Auf diese Fläche Θ_I kommen wir unter Nr. 11 nochmals zurück. Andere Verallgemeinerungen der Fläche Θ_I , die einen Kreis zur Kehllinie und einen Drehkegel mit beliebigem Öffnungswinkel als Zentraltorse haben, behandelte der Verfasser an anderer Stelle (siehe [8], Nr. 1). In allen diesen Fällen ergibt sich der Drall gemäß Gl. 17.

Nr. 10. Die *Kegelflächen* Γ mit einer natürlichen Gleichung von der einfachen Form (13) oder (18) oder von der davon nicht wesentlich verschiedenen Form

$$\kappa_j(\varphi) = C \sin \varphi \quad \text{bzw.} \quad = C \operatorname{tg} \varphi \quad (C = \text{konst})$$

wurden anscheinend noch nicht untersucht. Sie sind — zufolge der Periodizität der trigonometrischen Funktionen — in gestaltlicher Hinsicht besonderen zyklischen Kegeln bzw. den Evolventenkegeln von Drehkegeln ziemlich ähnlich. Wie diese besitzen die Kegel Γ eine endliche oder unendliche Anzahl von *Wendeerzeugenden* $\mathbf{e}_n(\kappa_i = 0)$, die zugleich Symmetrieachsen von Γ bilden. Alle Mantelsektoren Γ_n dieser Kegel, die zwischen je zwei aufeinander folgenden Wendeerzeugenden $\mathbf{e}_n$ und $\mathbf{e}_{n+1}$ liegen, sind untereinander kongruent. Überdies enthält jeder solche Kegelsektor im Falle der Gl. 13 eine *Scheitelerzeugende* ($\varphi = 0, \text{ mod } \pi$), im Falle der Gl. 18 eine *Rückkehrerzeugende* ($\kappa_i = \infty$). Diese Scheitel- bzw. Rückkehrerzeugenden gehören jeweils einer Symmetrieebene von Γ an.

Für bestimmte Werte der in Gl. 13 bzw. 18 vorhandenen Konstanten C schließt sich der Kegel Γ nach dem Durchlaufen einer endlichen Anzahl von Mantelsektoren Γ_n . Es wäre wohl von einigem Interesse, diese besonderen Kegelflächen, insbesondere die darunter vorhandenen algebraischen, einem eingehendem Studium zu unterziehen.

Nr. 11. Als Seitenstücke zu den in Nr. 8 betrachteten windschiefen Flächen können jene angesehen werden, bei denen

$$\kappa_i(\varphi) = \text{konst} = \kappa^0 \quad (\kappa^0 \neq 0)$$

gilt, die also einen *Drehkegel* Δ zur *Zentraltorse* haben. Für diese Flächen Φ folgt aus Gl. 6:

$$p(\varphi) = -\frac{1}{\kappa^0} \left(\cot \varphi \, r(\varphi) + r'(\varphi) \right), \quad (19)$$

oder, falls $p(\varphi)$ vorgeschrieben wird, nach Gl. 8:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi} \left(C - \kappa^0 \int \sin \varphi \, p(\varphi) \, d\varphi \right), \quad C = \text{konst.} \quad (20)$$

Mit diesen Gleichungen ist für die hier vorliegenden Flächen der funktionale Zusammenhang zwischen der Kehllinie und der Verteilung der verschiedenen Werte des Dralles p klargestellt. Damit eine solche windschiefe Fläche mit Zentraldrehkegel Δ insbesondere *konstanten Drall* $p = p^0 (\neq 0)$ aufweist, muß ihre Kehllinie $\mathbf{k}$ nach dem Verebnen von Δ der Gleichung genügen (Nr. 7, Gl. 11):

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi} (C + K \cos \varphi), \quad K = \kappa^0 p^0 \neq 0, \quad (21)$$

oder auf cartesische Koordinaten umgerechnet:

$$(x^2 + y^2)(y - C)^2 - K^2 x^2 = 0. \quad (22)$$

In diesem Fall ergibt sich somit die verebnete Kehllinie $k^\vee$ auch als „Kissoide“ (wegen dieses Begriffes siehe [13], § 1) der Kappakurve (siehe [11], S. 196):

$$r(\varphi) = K \cot \varphi \quad \text{bzw.} \quad (x^2 + y^2)y^2 - K^2 x^2 = 0 \quad (23)$$

und der (zu ihren reellen Asymptoten parallelen) Geraden $y = -C$ für den Berührungsknoten der ersteren als Pol. $k^\vee$ ist eine rationale zirkuläre Kurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt im Nullpunkt $O = S^\vee$, einem weiteren Doppelpunkt an der Stelle $x = 0, y = C$ und mit den beiden zur x -Achse parallelen Wendearasymptoten $y = C + K, y = C - K$ (siehe Abb. 2).

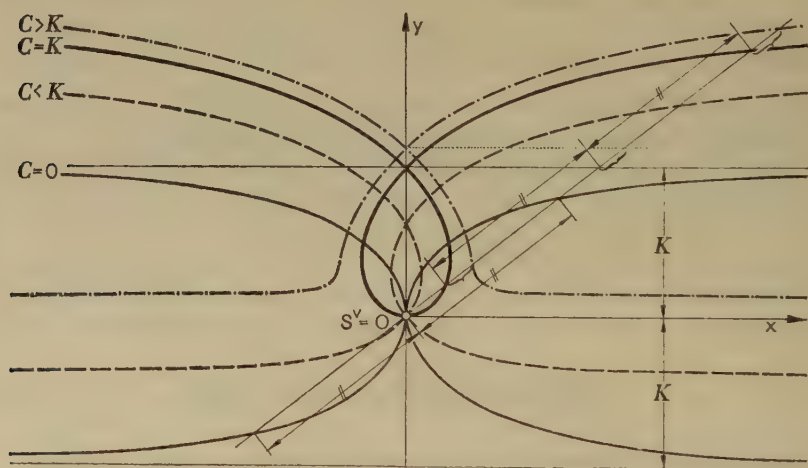


Abb. 2

Für $C = 0$ reduziert sich $k^\vee$ auf die Kappakurve (Gl. 18), und für $K = C$ zerfällt $k^\vee$ in die x -Achse ($y = 0$) und die Strophoide:

$$(x^2 + y^2)(y - 2C) + C^2 y = 0. \quad (24)$$

Daß die letztgenannte auch als Kissoide der Kappakurve und einer ihrer Asymptoten erzeugbar ist (siehe Abb. 2), scheint noch wenig bekannt zu sein.

Nr. 12. Da auch umgekehrt für jede windschiefe Fläche Φ mit Zentralschneidkegel Δ und einer verebneten Kehllinie $k^\vee$ von der Gleichungsform (21), (22), insbesondere (23) oder (24), der Drall p konstant $= p^0$ ist, erhalten wir schließlich den

Satz 6: Eine windschiefe Fläche Φ mit einem Drehkegel Δ als Zentraltorse ($\kappa_j = \text{konst} = \kappa^0 \neq 0, \neq \infty$) hat dann und nur dann konstanten Drall $p = p^0 \neq 0$, wenn die Kehllinie k von Φ beim Verebnen von Δ in eine Kissoide der Kappakurve mit der Gleichung 21, 22, im besonderen in eine Kappakurve (Gl. 23) oder in eine Strophoide (Gl. 24) übergeht, wobei die reellen Asymptoten dieser Kurven dem Parallelstrahlbüschel der mit Δ verebneten Erzeugenden e^v von Φ angehören.

An diesem Ergebnis ist beachtenswert, daß diese windschiefen Flächen — wie auch die in Nr. 8 behandelten — im allgemeinen *transzendent* sind, aber auch *algebraisch* sein können (siehe später Nr. 14). Das einfachste Beispiel einer algebraischen Fläche von der im Satz 6 beschriebenen Art liegt in der eingangs erwähnten *Cayleyschen Fläche* Θ_{III} vor. Bei dieser ist die Zentraltorse ein Drehkegel Δ mit dem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{3}$, also mit der konischen Krümmung $\kappa_j = \sqrt{3}$, und die Kehllinie k von Θ_{III} , ein schiefer kubischer Kreis, geht beim Verebnen von Δ in eine *Kappakurve* k^v gemäß Gl. 18 über. Dabei sind die reellen Asymptoten von k^v parallel zu den verebneten Erzeugenden e^v .

Nr. 13. Diese besonderen Eigenschaften der Fläche Θ_{III} , die im Einklang mit obigem Satz 6 stehen, hat der Verfasser bereits in einer 1947 erschienenen Abhandlung klargelegt [7]. Darin wurden überdies alle *windschiefen Flächen dritten Grades* Θ^k mit einem Drehkegel als Zentraltorse untersucht. Es gibt davon ∞^1 hinsichtlich der Hauptgruppe wesentlich verschiedene Formen. Jede dieser Flächen Θ^k besitzt einen schiefen kubischen Kreis als Kehllinie k , der nur für den Grenzfall der Fläche Θ_I (Nr. 9) in einen Kreis und eine (spezielle zylindrische) Erzeugende zerfällt (siehe [6], Nr. 7, sowie [12], Nr. 25, Satz 5, und Nr. 40, A). Wird von den Flächen Θ_I und Θ_{III} abgesehen, so geht aus der Kehllinie k beim Verebnen des Zentraldrehkegels Δ einer Fläche Θ^k stets eine sogenannte „*schiefe Kappakurve*“ (vgl. [11], S. 199) hervor (s. [7], S. 91). Eine solche wird mittels der hier verwendeten Polarkoordinaten durch die Gleichung dargestellt:

$$r = q \sin \delta \cot \varphi + 2 q \cos \delta, \quad (25)$$

wobei q eine Konstante bedeutet und δ ein die Gestalt der Kurve bestimmender Parameter ist.

Für den Grenzfall Θ_I ist $\delta = 0$, für Θ_{III} insbesondere $\delta = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Da der Achsenwinkel des Zentraldrehkegels Δ bei allen

Flächen Θ^k gleich $\frac{\pi}{6}$ ($\kappa_j = \sqrt{3}$) ist, ergibt sich für den Drall dieser Flächen nach Gl. 14 die Formel:

$$p = \frac{q}{\sqrt{3}} (\sin \delta - 2 \cos \delta \cot \varphi). \quad (26)$$

Man erkennt daraus, daß der Drall einer Fläche Θ^k nur für $\delta = \frac{\pi}{2}$, also *nur für die Cayleysche Fläche Θ_{III} , konstant* ist (vgl. hiezu [2]).

Für die Fläche Θ_I ($\delta = 0$) folgt aus Gl. 25:

$$r = 2q = r^0; \quad (27)$$

die Kehllinie k von Θ_I ist mithin ein Kreisschnitt des Zentralsdrehkegels, wobei k zusammen mit der speziellen zylindrischen Erzeugenden z dieser Fläche die Grenzform der Kehllinie der allgemeinen Flächen Θ^k bildet (siehe oben). Die verschiedenen Werte des Dralles von Θ_I sind nach Gl. 21 und 27:

$$p = -\frac{2q}{\sqrt{3}} \cot \varphi = -\frac{r^0}{\sqrt{3}} \cot \varphi, \quad (28)$$

und dies folgt auch aus Gl. 17 in Nr. 9. Man entnimmt aus Gl. 28, daß Θ_I in der zylindrischen Erzeugenden z ($\varphi = 0$) den Drall ∞ , in der zweiten Torsallinie ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, die vom Kehlkreis in ihrem Kuspidualpunkt berührt wird, den Drall 0 besitzt (vgl. hiezu [6], Nr. 7, sowie [12], Nr. 40, A).

Nr. 14. Unter den mit Satz 6 gekennzeichneten windschiefen Flächen gibt es neben der *Cayleyschen Fläche Θ_{III}* noch andere *algebraische Flächen*, und zwar unbegrenzt viele, in diskreter Verteilung. Eine algebraische windschiefe Fläche mit Zentralsdrehkegel und konstantem Drall liegt tatsächlich immer vor, wenn die konische Krümmung κ^0 des Drehkegels Δ so beschaffen ist, daß beim Verebnen von Δ durch Aneinanderfügen von m einblättrigen Abwicklungen von Δ (wobei m eine ganze positive Zahl ist) eine lückenlose ein- oder mehrblättrige Überdeckung der Ebene hergestellt wird. Solche Werte von κ^0 und die zugehörigen Zahlen m sind beispielsweise:

$$\begin{array}{cccccc} \kappa^0 = & \sqrt{3} & \sqrt{8} & \sqrt{15} & \frac{4}{3} & \frac{3}{4} \dots \\ m = & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \dots \end{array}$$

Unter allen diesen Fällen ist der bereits besprochene $\kappa^0 = \sqrt{3}$ (siehe Nr. 12, 13) der weitaus einfachste. Da jede windschiefe Fläche Φ mit einem Drehkegel Δ als Zentraltorse (oder als Richtkegel der Zentraltorse) einen Evolventenkegel Λ von Δ zum Richtkegel hat (siehe [12], Nr. 22, Satz 2), ist der Grad von Φ keinesfalls niedriger als die Ordnung von Λ . Nun ist aber Λ bloß im Falle $\kappa^0 = \sqrt{3}$ von dritter, in allen übrigen Fällen von meist viel höherer Ordnung.

Daß sowohl Θ_{III} als auch alle bisher entdeckten windschiefen Flächen vierten Grades mit gleichem Drall in allen Erzeugenden denselben speziellen Richtkegel dritter Ordnung haben, hängt u. a. damit zusammen, daß diese Flächen in einheitlicher Weise durch gewisse nichteuklidische Schraubungen erzeugbar sind. Dies zeigt H. Brauner in seiner im vorliegenden Heft veröffentlichten Arbeit [4].

Die Frage, ob unter den oben in Nr. 8 besprochenen windschiefen Flächen oder unter den Flächen des Satzes 6 auch solche vierten Grades vorkommen, sei weiteren Forschungen vorbehalten.

Schließlich kann die obigen Betrachtungen zu Grunde gelegte Formel für den Drall (Nr. 3, Gl. 4) auch zur Untersuchung allgemeinerer windschiefer Flächen herangezogen werden, etwa jener, die eine Böschungsfäche zur Zentraltorse haben.

Literatur

- [1] H. Brauner, Die Strahlflächen von konstantem Drall, Mh. Math. **63** (1959), S. 101—111.
- [2] H. Brauner, Die Strahlfläche dritten Grades mit konstantem Drall, Mh. Math. **64** (1960), S. 101—109.
- [3] H. Brauner, Die konstant gedrahlte Netzfläche vierten Grades, Mh. Math. **65** (1961), S. 53—73.
- [4] H. Brauner, Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrahlter Strahlflächen, Mh. Math. **65** (1961), S. 301—314.
- [5] R. Edlinger, Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind, S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. IIa, **132** (1923), S. 343—351.
- [6] J. Krames, Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert, S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. IIa, **133** (1924), S. 65—90.
- [7] J. Krames, Die Regelflächen dritten Grades mit einem Drehkegel als Zentraltorse, S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. IIa, **155** (1947), S. 83—96.
- [8] J. Krames, Über Regelflächen, die mit gewissen aus ihnen abgeleiteten Flächen kongruent sind, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. IIa, **155** (1947), S. 149—165.

[9] *J. Krames*, Über den Drall windschiefer Flächen, Anzeiger der Österr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. 97 (1960), S. 187—192.

[10] *E. Kruppa*, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien 1957, VIII + 192 S., 75 Abb.

[11] *G. Loria*, Ebene Kurven, deutsch von F. Schütte, I. Bd., 2. Aufl., Leipzig 1910.

[12] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, III. Bd., „Konstruktive Behandlung der Regelflächen“, Leipzig und Wien 1931, VI + 303 S., 153 Textfiguren, 1 Tafel.

[13] *H. Wieleitner*, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908, XVI + 409 S., 189 Fig.

Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung

Von

Josef Rybarz, Wien

Herrn Prof. Dr. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

(Eingegangen am 7. Dezember 1960)

Eine der schwerstwiegenden Entscheidungen, die jeder Versicherer zu treffen hat, ist die Festsetzung einer oberen Grenze für jene Leistungen, die er ohne Inanspruchnahme eines Rückversicherers, also auf eigene Rechnung und Gefahr, zu versichern bereit ist. Diese obere Grenze (sie soll mit M bezeichnet werden) wird als das Maximum des Selbstbehaltes bezeichnet. Ist dieses Maximum M nämlich einmal festgesetzt, so verfährt der Versicherer so, daß er bei versicherten Leistungen, die M übersteigen, den M übersteigenden Teil rückversichert; dagegen bleiben Leistungen bis zur Höhe M zur Gänze im Selbstbehalt des Versicherers.

In der Lebensversicherung, wo die Versicherungsleistung im allgemeinen in der Zahlung der Versicherungssumme besteht (wie bei temporären und lebenslänglichen Ablebensversicherungen, gemischten Versicherungen, Versicherungen à terme fixe etc., die hier ausschließlich behandelt werden sollen), wird es sich also darum handeln, eine obere Grenze für jene Versicherungssummen zu finden, die der Versicherer noch ohne Inanspruchnahme eines Rückversicherers versichern kann.

Die Festsetzung von M hat vor allem unter Bedachtnahme auf die Sicherheit des Versicherungsunternehmens zu erfolgen. Aber auch andere Erwägungen tarifpolitischer und rückversicherungspolitischer Natur spielen eine Rolle. Hier soll gezeigt werden, wie die moderne Risikotheorie die Frage des Maximums des Selbstbehaltes vom Sicherheitsstandpunkt aus zu lösen vermag.

Zunächst sei an einige fundamentale Begriffe der Spieltheorie erinnert:

Es sei X eine Zufallsvariable, die nur nichtnegative Werte annimmt, die alle unterhalb einer oberen Schranke C liegen:

$$0 \leq X \leq C. \quad (1)$$

Die Verteilungsfunktion dieser Variablen,

$$F(x) = \text{Prob} \{X \leq x\} \quad (2)$$

sei bekannt.

Wegen (1) existiert dann auch die sogenannte momenterzeugende Funktion von X :

$$m(t) = \int_{x=0}^{\infty} e^{tx} dF(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{v!} t^v, \quad (3)$$

wo t eine reelle Variable und

$$a_v = \int_{x=0}^{\infty} x^v \cdot dF(x) \quad (4)$$

das v -te Moment der Verteilung bedeutet.

Es ist speziell

$$a_0 = 1 \quad (5)$$

und es werde vorausgesetzt, daß

$$a_1 > 0 \quad (6)$$

sei, was bedeutet, daß die Variable X positive Werte mit von Null verschiedener Wahrscheinlichkeit annehmen kann.

Es seien nun A und B zwei Spieler. A verpflichte sich, an B die Zahlung x zu leisten, falls die Zufallsvariable X bei einem Versuch („Spiel“) den Wert $X = x$ annimmt. Der „rechtmäßige Einsatz“, den dafür B an A zu leisten hat, ist

$$\mathfrak{E} = \int_{x=0}^{\infty} x \cdot dF(x) = a_1 > 0. \quad (7)$$

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt nun, daß ein über ein (endliches) Vermögen verfügender Spieler seinem sicheren Ruin entgegengeht, wenn er fortlaufend gegen irgendwelche Partner B Spiele zum rechtmäßigen Einsatz durchführt. Um den Ruin zu vermeiden, muß er von B einen Einsatz

$$\overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E} + c, \quad (c > 0) \quad (8)$$

fordern, und es fragt sich, wie hoch der „Sicherheitszuschlag“ c zu bemessen sei, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A im Verlaufe aller dieser Spiele jemals ruiniert werde, einen vorgegebenen Wert nicht übersteige.

Antwort auf diese Frage gibt ein von *Finetti* herrührendes Theorem. Um es formulieren zu können, werde folgende Definition vorausgeschickt:
 „Der Einsatz $\bar{\mathfrak{C}}$ entspricht dem Sicherheitsindex τ , wenn er nach der Formel

$$\bar{\mathfrak{C}} = \frac{\ln m(\tau)}{\tau} \quad (9)$$

berechnet wurde. Dabei bedeutet τ eine positive reelle Zahl“.

Man kann leicht nachweisen, daß die durch (9) definierte Funktion von τ monoton zunimmt, und daß

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \quad (10)$$

ist. Ein nach Formel (9) berechneter Einsatz $\bar{\mathfrak{C}}$ enthält also tatsächlich einen Sicherheitszuschlag $c = \bar{\mathfrak{C}} - \mathfrak{C} > 0$.

Nun kann das angekündigte Theorem ausgesprochen werden:

„Sei A ein über ein (endliches) Anfangsvermögen K verfügender Spieler. Er spielt gegen irgendwelche Partner B eine unbegrenzte Serie von Spielen

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \dots \quad (11)$$

(wobei ein neues Spiel immer erst dann begonnen wird, wenn das vorhergehende beendet ist und alle aus dem letzteren resultierenden Zahlungen geleistet sind), und hebt dafür von seinen Partnern die Einsätze

$$\bar{\mathfrak{C}}_1, \bar{\mathfrak{C}}_2, \bar{\mathfrak{C}}_3, \dots \quad (12)$$

ein, die alle dem gleichen Sicherheitsindex τ entsprechen mögen. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit Π dafür, daß A im Verlaufe dieser Spielserie jemals ruiniert wird, die Ungleichung:

$$\Pi \leq e^{-\tau K}. \quad (13)$$

Dabei können die Spiele $\mathfrak{S}_i$ sowohl Ihrer Art nach als auch hinsichtlich der Höhe der aufs Spiel gesetzten Beträge ganz verschieden sein“.

Mit anderen Worten: Errichtet A einen Fonds, den er mit dem Anfangskapital K dotiert, in welchen er ferner die Einsätze $\bar{\mathfrak{C}}_i$ fließen läßt und aus welchem er die Zahlungen an seine Spielpartner B leistet, so ist die Wahrscheinlichkeit Π dafür, daß dieser Fonds sich jemals erschöpfe, $\leq e^{-\tau K}$.

Es ist naheliegend, dieses Theorem auch auf Versicherungen anzuwenden. Denn jede Versicherung stellt ja eine Art Spiel oder Wette zwischen dem Versicherer (Spieler A) und dem Versicherten (Spieler B)

dar. Eine gewisse Schwierigkeit besteht allerdings darin, daß das Theorem voraussetzt, daß immer ein Spiel nach dem anderen durchgeführt wird, während ein Versicherer eine neue Versicherung nicht erst dann abschließt, wenn die vorhergehende abgelaufen ist, sondern eine meist große Anzahl von Versicherungen gleichzeitig laufen hat. Es läßt sich aber nachweisen, daß diese Schwierigkeit unerheblich ist und daß das Theorem auch in diesem Falle gilt.

Als Beispiel für die Anwendung des Theorems von *Finetti* in der Lebensversicherung sollen jetzt einjährige Ablebensversicherungen betrachtet werden: Der Versicherer habe die Summe S zu zahlen, wenn der z -jährige Versicherte im Laufe des Versicherungsjahres stirbt; erlebt der Versicherte aber das Ende des Versicherungsjahres, habe der Versicherer nichts zu zahlen.

Die Zufallsvariable X (Zahlung des Versicherers) kann hier die beiden Werte

$$S \text{ mit der Wahrscheinlichkeit } q_z \text{ (einjährige Sterbens-} \\ \text{wahrscheinlichkeit der } z\text{-jährigen),} \quad (14)$$

und

$$0 \text{ mit der Wahrscheinlichkeit } p_z \text{ (einjährige Erlebens-} \\ \text{wahrscheinlichkeit der } z\text{-jährigen)} \quad (15)$$

annehmen. Die einmalige Nettoprämie dieser Versicherung (rechtmäßiger Einsatz des Spielers B) lautet daher:

$$P_z(S) = Sq_z, \quad (16)$$

wobei von der Verzinsung wegen der Kürze der Versicherungsdauer abgesehen wurde. Für die momenterzeugende Funktion erhält man:

$$m(t) = q_z \cdot e^{St} + p_z. \quad (17)$$

Die dem Sicherheitsindex τ entsprechende „Sicherheitsprämie“ $\bar{P}_z(S)$ (entsprechend dem Einsatz $\bar{Q}$ des Spielers B) wird daher:

$$\bar{P}_z(S) = \frac{\ln(q_z \cdot e^{S\tau} + p_z)}{\tau} \quad (18)$$

Pro Einheit der versicherten Summe wird also an Sicherheitsprämie eingehoben der Betrag

$$Q_z(S) = \frac{\bar{P}_z(S)}{S} = \frac{\ln(q_z \cdot e^{S\tau} + p_z)}{S\tau}, \quad (19)$$

der demnach von S abhängig ist. Im Gegensatz dazu wird an Nettoprämie pro Einheit der Versicherungssumme der konstante Betrag q_z eingehoben, wie aus (16) hervorgeht.

$Q_z(S)$ ist eine monoton zunehmende Funktion von S , und es gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$\lim_{S \rightarrow 0} Q_z(S) = q_z, \quad (20)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} Q_z(S) = 1. \quad (21)$$

Die nachfolgende Tabelle, die den Zahlenwerten $q_z = 0.01$, $K = 5.10^6$, $\tau = 3.10^{-6}$, und daher, wegen (13), $\Pi \leq 10^{-6}$, entspricht, soll die vorliegenden Verhältnisse illustrieren:

Tabelle I

Versicherungssumme S	Sicherheitsprämie $\bar{P}_z(S)$	$Q_z(S)$
1.000	10.02	0.01002
10.000	101.50	0.01015
100.000	1.164. —	0.01164
1,000.000	58.224. —	0.05822
10,000.000	8,464.900. —	0.84649

Wie man aus der Tabelle ersieht und wie ja auch aus (21) hervorgeht, erreicht die Sicherheitsprämie für hohe Versicherungssummen die Größenordnung der letzteren, so daß Versicherungen auf dieser Basis kaum zustande kommen würden. Die Lebensversicherungs-Unternehmungen legen daher der Berechnung ihrer Tarifprämien eine Sicherheitsprämie zugrunde, deren Verhältnis zur Versicherungssumme von der Höhe der letzteren unabhängig ist. Auf die Einheit der Versicherungssumme bezogen möge dieselbe den Wert

$$q_z + \varepsilon_z \quad (\varepsilon_z > 0; q_z + \varepsilon_z < 1) \quad (22)$$

haben, d. h. sie entsteht aus der nur vom Alter abhängigen Nettoprämie q_z durch Hinzufügung eines ebenfalls nur vom Alter abhängigen Zuschlages ε_z . Für eine auf die Summe S lautende einjährige Ablebensversicherung eines z -jährigen wird daher an Sicherheitsprämie der Betrag

$$S(q_z + \varepsilon_z) \quad (23)$$

eingehoben.

Da nun die Funktion $Q_z(S)$ monoton zunehmend und stetig ist, muß es wegen (20) und (21) genau einen Wert $S = M_z$ geben, für den

$$Q_z(M_z) = q_z + \varepsilon_z \quad (24)$$

wird. Die vom Versicherer eingehobene Sicherheitsprämie (23) entspricht dann für $S = M_z$ genau jener, die auf Grund des *Finettischen* Theorems berechnet wurde; sie ist für $S < M_z$ höher und für $S > M_z$ niedriger als die auf Grund des Theorems von *Finetti* berechnete.

Von dieser Tatsache kann nur der Versicherer in der Weise Gebrauch machen, daß er für die einjährige Ablebensversicherung von Personen des Alters z das Maximum des Selbstbehaltes mit M_z festsetzt. Er nimmt dann für die in seinem Selbstbehalt verbleibenden Versicherungssummen mindestens die dem Sicherheitsindex τ entsprechende Sicherheitsprämie ein und weiß daher, daß seine Ruinwahrscheinlichkeit $\leq e^{-K\tau}$ ist.

In der folgenden Tabelle, die den Zahlenwerten $\tau = 3 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_z = 0.001$ entspricht, sind die Zahlen M_z für einige Werte der Sterbenswahrscheinlichkeit q_z tabelliert.

Tabelle II

q_z	M_z	q_z	M_z
0.0025	214.000.—	0.04	17.000.—
0.005	119.000.—	0.05	14.000.—
0.01	63.000.—	0.1	7.300.—
0.015	43.000.—	0.2	4.200.—
0.02	33.000.—	0.3	3.200.—
0.025	28.000.—	0.4	2.800.—
0.03	22.000.—	0.5	2.700.—
0.035	19.000.—		

Das hier geschilderte Verfahren ist geeignet, dem Versicherer zunächst einen vorläufigen Überblick über das Maximum des Selbstbehaltes bei einjährigen Ablebensversicherungen zu geben. Es könnte aber noch verfeinert werden. Da nämlich bei Versicherungssummen $S < M_z$ mehr an Sicherheitszuschlag eingehoben wird, als dem Sicherheitsindex τ entspricht, könnte dieses Zuviel an Sicherheitszuschlag dazu verwendet werden, um das Zuwenig an Sicherheitszuschlag bei Versicherungssummen $S > M_z$ ganz oder zum Teil zu kompensieren. Ob und inwieweit dies möglich ist, hängt von der Verteilung der Versicherungssummen nach ihrer Höhe und nach dem Alter der Versicherten ab.

Die Anwendung des Theorems von *Finetti* in der Lebensversicherung wurde hier an dem einfachen Beispiel der einjährigen Ablebensversiche-

rung illustriert. Es ist aber vollständig ausreichend, einjährige Ablebensversicherungen zu betrachten. Denn, vom Standpunkte der Risikotheorie aus gesehen, ist ja jede Art Lebensversicherung äquivalent einer Reihe von aufeinanderfolgenden einjährigen Ablebensversicherungen auf das jeweilige Risikokapital, und daher jeder Lebensversicherungsbestand äquivalent einem Bestand von lauter einjährigen Ablebensversicherungen. Will daher der Versicherer für ein bestimmtes Versicherungsjahr einer bestimmten Versicherung die Maximalhöhe seines Selbstbehaltes an Risikokapital bestimmen, so hat er zunächst festzustellen, welcher Teil der von ihm eingehobenen Bruttoprämie für die Versicherung des Risikokapitales verfügbar ist und wie hoch der in dieser Risikoprämie enthaltene Sicherheitszuschlag ist. (Diese Berechnungen haben natürlich unter Zugrundelegung von Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung zu erfolgen.) Hat er das festgestellt, so kann er das dem von ihm gewählten Sicherheitsindex τ entsprechende Maximum seines Selbstbehaltes berechnen. Übersteigt das Risikokapital der Versicherung dieses Maximum, so wäre der Überschuß an Risikokapital als einjährige Ablebensversicherung gegen Zahlung der darauf entfallenden Risikoprämie rückzuversichern.

Literatur

B. de Finetti: La teoria del rischio e il problema della rovina dei giocatori. (Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, anno X, nos 1–2, 1939, Roma.)

Vom gleichen Autor: Il problema dei „pieni“. (Giornale dell'Istituto degli Attuari, anno XI, no 1, 1940, Roma.)

Gaston Baudez: Le plein dans les Compagnies d'assurance. Application au cas particulier des assurances sur la vie. (Librairie Dulac, Paris, 1941.)

J. Dubourdieu: Théorie mathématique des assurances, Fascicule 1. (Gauthier-Villars, Imprimeur — Editeur, Paris, 1952.)

Zur Kinematik der flächentreuen Affinitäten mit fixem Ursprung

Von

Wolfgang Ströher, Wien

Herrn Prof. Dr. E. Kruppa zum 75. Geburtstage

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 14. Dezember 1960)

Im folgenden möge die Kinematik der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ax + by \\ \bar{y} &= cx + dy\end{aligned} \quad \text{mit } \Delta = ad - bc = 1 \quad (1)$$

bestimmten affinen und flächentreuen Transformationen der Ebene untersucht werden. Durch Wahl der Koeffizienten a, b, c, d als beliebige Funktionen eines Parameters t ist eine einparametrische Schar von Transformationen festgelegt. Jeder Punkt (x, y) der Ebene beschreibt unter der Einwirkung dieser Schar eine Bahnkurve $\bar{x} = \bar{x}(t; x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(t; x, y)$. Diese kontinuierliche Folge von Transformationen werde in Analogie zur euklidischen Ebene *Bewegung* genannt und stellt den Gegenstand der folgenden Betrachtungen dar.

Bewegungsinvarianten

Die Transformationen (1) bilden eine *dreiparametrische Gruppe*, deren Erweiterungen auf die Elemente 1. und 2. Ordnung lauten

$$\bar{y}' = \frac{c + dy'}{a + by'}, \quad \bar{y}'' = \frac{y''}{(a + by')^3}. \quad (2)$$

Hieraus entnimmt man zunächst die Beziehung

$$\bar{x} \bar{y}' - \bar{y} = \frac{xy' - y}{a + by'}, \quad (3)$$

so daß sich

$$J = \frac{\bar{y}'''}{(\bar{x} \bar{y}' - \bar{y})^3} = \frac{y'''}{(xy' - y)^3} \quad (4)$$

als Invariante erweist, die das Analogon zur euklidischen Krümmung darstellt. Die durch $J = \text{const.}$ erklärten „ J -Kurven“ als Analoga zu den euklidischen Kreisen sind die Kegelschnitte

$$A \bar{x}^2 + 2 C \bar{x} \bar{y} + B \bar{y}^2 + D = 0 \quad (5)$$

mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Dabei gilt

$$J = \frac{AB - C^2}{D^2} \quad (6)$$

und die Invariante J , welche ein derartiger Kegelschnitt der Gruppe (1) gegenüber besitzt, hängt mit dem Flächeninhalt F des von zwei konjugierten Halbmessern des Kegelschnittes gebildeten Parallelogramms in folgender Weise zusammen

$$J = \frac{1}{F^2}, \quad \begin{array}{ll} > 0 \text{ Ellipse} \\ J < 0 \text{ Hyperbel} \\ = 0 \text{ zum Ursprung symmetrisches Parallelenpaar} \end{array} \quad (7)$$

Beachtet man die Beziehung

$$d\bar{x} = (a + by') dx, \quad (8)$$

so folgt aus (3) ein *invariantes Differential*

$$ds = (\bar{x} \bar{y}' - \bar{y}) d\bar{x} = (xy' - y) dx, \quad (9)$$

das *Bogenelement* der Gruppe.

Einparametrische Bewegungen

Sind a, b, c, d wie oben beschriebene Funktionen eines Parameters t , so bildet die so entstehende Schar von Transformationen i. a. keine Gruppe. Zunächst mögen die Bahnkurven eines Punktes (x, y) unter dem Einfluß dieser Schar von Transformationen untersucht werden. Im Zeitpunkt t befindet sich der betrachtete Punkt an der Stelle

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a(t) x + b(t) y, \\ \bar{y} &= c(t) x + d(t) y. \end{aligned} \quad x, y = \text{const.} \quad (10)$$

Die Tangente in einem Punkt der Bahnkurve ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \dot{a} x + \dot{b} y, \\ \dot{\bar{y}} &= \dot{c} x + \dot{d} y, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei zunächst

$$\Delta_1 = \dot{a} \dot{d} - \dot{b} \dot{c} \neq 0 \quad (12)$$

vorausgesetzt werde. Das Richtungsfeld genügt in jedem Augenblick der Jacobischen Differentialgleichung

$$y' = \frac{\alpha \bar{x} + \bar{y}}{-\bar{x} + \beta \bar{y}} \text{ mit } \alpha = \frac{d\dot{c} - \dot{c}d}{a\dot{d} - \dot{b}c}, \quad \beta = \frac{a\dot{b} - \dot{b}a}{a\dot{d} - \dot{b}c}. \quad (13)$$

Die Integralkurven des Richtungsfeldes sind die Kegelschnitte

$$\alpha \bar{x}^2 + 2 \bar{x} \bar{y} - \beta \bar{y}^2 + \gamma = 0 \quad (14)$$

mit den gemeinsamen Asymptoten

$$\alpha \bar{x}^2 + 2 \bar{x} \bar{y} - \beta \bar{y}^2 = 0. \quad (15)$$

Die momentane Fortbewegung aller Punkte des bewegten Systems erfolgt mithin jeweils längs solcher konzentrischen Kegelschnitte. Diese Kegelschnitte sind

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipsen} & \\ \text{Hyperbeln} & \text{je nachdem } 1 + \alpha\beta \left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ > 0 \\ = 0 \end{array} \right. \text{ ist.} \\ \text{parallele Gerade} & \end{array}$$

Der entsprechende Bewegungszustand der Ebene heiße dann *elliptisch*, *hyperbolisch* oder *parabolisch*. Besonders interessant sind jene Bewegungen, bei denen in jedem Zeitpunkt ein parabolischer Bewegungszustand vorliegt. Dann ist also für jedes t

$$1 + \alpha\beta = 0,$$

oder vermöge (12) und (13)

$$1 + \alpha\beta = -\frac{\Delta_1}{(a\dot{d} - \dot{b}c)^2} = 0,$$

woraus

$$\Delta_1 = \dot{a}\dot{d} - \dot{b}\dot{c} = 0 \quad (16)$$

folgt. Wegen der Festsetzung (12) sind also parabolische Bewegungszustände zunächst von der Betrachtung ausgeschlossen und mögen für später aufgespart werden.

Das Analogon zur Krümmung der Bahnkurven liefert Formel (4). Setzt man

$$1 + \alpha\beta = \delta, \quad a\dot{d} - \dot{b}c = \delta_1, \quad \frac{\dot{\alpha}}{\delta_1} = \lambda, \quad \frac{\dot{\beta}}{\delta_1} = \mu \quad (17)$$

so findet man

$$\bar{J} = - \frac{\delta(\alpha \bar{x}^2 + 2 \bar{x} \bar{y} - \beta \bar{y}^2) + [\lambda \bar{x}^2 + (\alpha\mu - \beta\lambda) \bar{x} \bar{y} + \mu \bar{y}^2]}{(\alpha \bar{x}^2 + 2 \bar{x} \bar{y} - \beta \bar{y}^2)^3}. \quad (18)$$

Fragt man für ein bestimmtes t nach dem Ort aller Punkte konstanter „Bahnkrümmung“, so findet man hiefür mit $\bar{J} = \text{const.}$ eine Kurve

6. Ordnung mit einem Wendeknoten im Ursprung, dessen Tangenten

$$\delta(\alpha \bar{x}^2 + 2 \bar{x} \bar{y} - \beta \bar{y}^2) + [\lambda \bar{x}^2 + (\alpha\mu - \beta\lambda) \bar{x} \bar{y} + \mu \bar{y}^2] = 0 \quad (19)$$

für alle Werte von $\bar{J}$ dieselben bleiben. Im Unendlichen hat die Kurve zwei Spitzpunkte, deren dreifach zählende Tangenten in die Geraden (15) fallen. Insbesondere stellt die in die zwei Geraden (19) zerfallende Kurve für $\bar{J} = 0$ (sie stimmt mit den Wendetangenten überein) den Ort aller Punkte dar, die im Augenblick einen Wendepunkt durchlaufen, während die $\bar{J} = \infty$ entsprechenden Geraden (15) den Ort aller Punkte bilden, deren Tangenten durch den Ursprung gehen.

Aus (13) und (18) entnimmt man, daß in jedem Zeitpunkt t das Richtungsfeld und die Krümmungsverhältnisse bekannt sind, wenn man von zwei Punkten die Bahntangenten und die Krümmungen angeben kann, weil sich dann die Koeffizienten α und β bzw. λ und μ ermitteln lassen.

Fixelemente

Für Punkte, die ihre Lage im Augenblick nicht ändern, muß gelten

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{y}} = 0. \quad (20)$$

Aus (11) und (10) folgt, daß dies unter der Voraussetzung (12) nur für den Ursprung $\bar{x} = \bar{y} = 0$ eintritt. Dies ist also der einzige (triviale) Fixpunkt im Endlichen. Die beiden Fixgeraden sind die durch (15) dargestellten Geraden durch den Ursprung, die wohl nicht punktweise, aber als ganze in sich übergehen.

Rollkurven

Interessantere Ergebnisse zeigen sich, wenn man die in jedem Augenblick parabolischen Bewegungen betrachtet, die durch die Beziehung (16) gekennzeichnet sind. Dann wird die Bedingung (20) vermöge (11) von allen Punkten der Geraden

$$\begin{aligned} X &= \varrho \dot{b}, \\ Y &= -\varrho \dot{a} \end{aligned} \quad (21)$$

im bewegten System erfüllt. In einem Zeitpunkt t liegen demnach alle

Fixpunkte auf einer Geraden durch den Ursprung. Die infinitesimale Transformation, welche zur Nachbarlage des bewegten Systems überführt, ist also eine Scherung mit dieser Achse. Das Richtungsfeld der Bahntangenten in diesem Augenblick besteht daher aus allen zur Achse parallelen Elementen 1. Ordnung.

Wählt man nun $\varrho = \varrho(t)$ als beliebige Funktion von t , so wird auf dieser Achse ein Punkt ausgezeichnet, dem im bewegten System die Koordinaten (21), im festen die Koordinaten

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \varrho(a\dot{b} - b\dot{a}), \\ \bar{Y} &= \varrho(c\dot{b} - d\dot{a})\end{aligned}\quad (22)$$

entsprechen. Die durch eine ein für allemal gewählte Funktion $\varrho(t)$ festgelegte Kurve (22) heiße eine *Rastpolkurve*, die Kurve (21) eine *Gangpolkurve*.

Die Tangente an die Gangpolkurve findet man aus (21)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\varrho}\dot{b} + \varrho\ddot{b}, & y' &= -\frac{\dot{\varrho}\dot{a} + \varrho\ddot{a}}{\dot{\varrho}\dot{b} + \varrho\ddot{b}} \\ \dot{y} &= -(\dot{\varrho}\dot{a} + \varrho\ddot{a}).\end{aligned}\quad (23)$$

Drückt man diese Richtung vermöge (2) im festen System aus, so findet man

$$\bar{y}' = \frac{\dot{\varrho}(c\dot{b} - d\dot{a}) + \varrho(c\ddot{b} - d\ddot{a})}{\dot{\varrho}(a\dot{b} - b\dot{a}) + \varrho(a\ddot{b} - b\ddot{a})}. \quad (24)$$

Zu eben diesem Resultat gelangt man auch, wenn man die Tangente an die durch (22) festgelegte Rastpolkurve ermittelt. *Die Polkurven berühren einander mithin.*

Die Polkurven sind aber auch im Sinne der Gruppe *längentreu* aufeinander bezogen. Ermittelt man nämlich das Bogenelement (9) der Polkurven aus (21) und (22), so erhält man beidemale

$$ds = \varrho^2(\dot{a}\ddot{b} - \ddot{a}\dot{b}) dt. \quad (25)$$

Die Polkurven rollen also im Sinne der Gruppe aufeinander ab. Da die Funktion $\varrho(t)$ keiner Einschränkung unterliegt, kann man sie so wählen, daß eine der beiden Polkurven eine *vorgegebene Form* hat. Die andere Polkurve ist dann vollkommen bestimmt.

Zykloiden

Von besonderem Interesse sind jene parabolischen Bewegungen, die durch das Rollen zweier *J*-Kurven aufeinander definiert sind. Dieser

dieselbe Transformation $\mathfrak{T}$ E nach $\bar{E}$ und P nach $\bar{P}$ über, so müssen die an der Stelle $\bar{E}$ analog für $\bar{P}$ gebildeten Größen $\bar{u}, \bar{v}$ mit u und v übereinstimmen.

Sollen nun im Sinne der Gruppe zwei J -Kurven (15) aufeinander rollen (wobei zur Illustration nur der Fall $J, \bar{J} > 0$ herangezogen werde), so kann man durch eine Transformation der Gruppe immer erreichen, daß die Rastpolkurve $\bar{k}$ in einen Kreis übergeht und die Berührung von k und $\bar{k}$ in einem Element der y -Achse erfolgt. Nun ist es, wie früher gezeigt wurde, möglich, an Stelle dieses Kreises als neue Rastpolkurve den Kreis vom Radius 1 zu wählen. Die Gangpolkurve k geht dann in eine Ellipse über, welche den Einheitskreis in der Ausgangsstellung im Element $E_0(0, 1, 0)$ berührt. Die Gleichungen der Polkurven in der Ausgangsstellung lauten dann

$$\begin{aligned} J X^2 + Y^2 &= 1 \dots \text{Gangpolkurve } k \\ \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 &= 1 \dots \text{Rastpolkurve } \bar{k} \end{aligned} \quad J = c^2 = \text{const.}$$

Führt man als Parameter die Bogenlänge s der Gruppe ein, so ergibt sich für obige J -Kurven folgende Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{1}{c} \sin cs \\ Y &= \cos cs \end{aligned} \right\} k \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= -\sin s \\ \bar{Y} &= \cos s \end{aligned} \right\} \bar{k} \quad (29)$$

Die Relativkoordinaten u, v des Punktes $P(x, y)$ in bezug auf das dem Parameterwert s entsprechende Element E der Gangpolkurve k lauten dann

$$u = \frac{1}{2} (x \cos cs + \frac{y}{c} \sin cs) \quad (30)$$

$$v = -xc \sin cs + y \cos cs$$

Die Einführung des Hilfswinkels φ durch die Beziehung

$$\frac{x}{w} = \sin \varphi, \quad \frac{y}{cw} = \cos \varphi, \quad w = \frac{\sqrt{c^2 x^2 + y^2}}{c}$$

vereinfacht (30) zu

$$u = \frac{1}{2} w \sin (cs + \varphi), \quad v = cw \cos (cs + \varphi). \quad (31)$$

Analog zu (30) sind die Relativkoordinaten $\bar{u}, \bar{v}$ von $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ in bezug auf das demselben Parameterwert s entsprechende Element $\bar{E}$ von $\bar{k}$

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{2}(\bar{x} \cos s + \bar{y} \sin s) \\ \bar{v} &= -\bar{x} \sin s + \bar{y} \cos s.\end{aligned}\quad (32)$$

Die Forderung $\bar{u} = u, \bar{v} = v$ liefert dann die Gleichung der Rollkurve des Punktes P , die man in Analogie zur euklidischen Geometrie als „Zykloide“ bezeichnen kann:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{w}{2} \{(c+1) \sin [(c-1)s + \varphi] - (c-1) \sin [(c+1)s + \varphi]\}, \\ \bar{y} &= \frac{w}{2} \{(c+1) \cos [(c-1)s + \varphi] + (c-1) \cos [(c+1)s + \varphi]\}.\end{aligned}\quad (33)$$

Der Darstellung (33) entnimmt man, daß es sich bei der speziellen Wahl von $\bar{k}$ auch im euklidischen Sinn um Zykloiden handelt. Ein Umfangs-

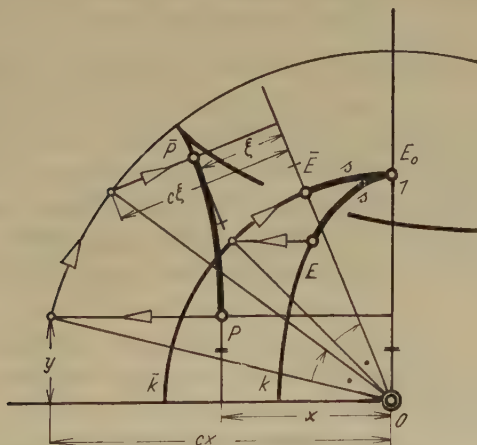


Abb. 2. Zykloide der Gruppe der flächentreuen Affinitäten mit fixem Ursprung ($c = 2, x = -0,75, y = 0,375$)

punkt eines Kreises vom Radius $\left| \frac{w(c-1)}{2} \right|$ beschreibt bei Rollung auf oder in einem festen Kreise vom Radius cw eine gespitzte Epi- bzw. Hypozykloide, je nachdem $c \leq 1$ ist. Da man die genannten Anfangsbedingungen immer durch eine Transformation der vorliegenden Gruppe herstellen kann, ersieht man, daß eine „Zykloide“ der Gruppe affin zu einer euklidischen gespitzten Epi- oder Hypozykloide ist.

Beitrag zur kinematischen Abbildung

Von

Karl Strubecker, Karlsruhe

Erwin Kruppa zum 75. Geburtstag (11. 8. 1960) gewidmet

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 17. August 1960)

§ 1. Kinematische Abbildung der Raumpunkte auf orientierte Linienelemente der Ebene

1. In seiner Bearbeitung des ersten Bandes der „Vorlesungen über Darstellende Geometrie“ von Emil Müller, der die Theorie der linearen Abbildungen behandelt, hat Erwin Kruppa¹ die erste lehrbuchmäßige Darstellung der kinematischen Abbildung gegeben, welche die Bewegungen der Ebene $\pi(X, Y)$ auf die Punkte $P(x, y, z)$ eines (quasielliptischen) Raumes $\mathfrak{P}$ abbildet. Wir fassen die Koordinaten (X, Y) der Punkte von π zu komplexen Zahlen $Z = X + i Y$ (isotrope Koordinaten) zusammen.

Beschreibt man die regulären ebenen Bewegungen mittels der homogenen Studyschen Parameter² $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3) \neq (0 : 0 : 0 : 0)$ durch die linearen Transformationen³

$$X + i Y = \frac{(\alpha_0 - i \alpha_3)(X_0 + i Y_0) + 2i(\alpha_1 + i \alpha_2)}{\alpha_0 + i \alpha_3} \quad (1)$$

mit nicht verschwindender Determinante $\alpha_0^2 + \alpha_3^2 \neq 0$, so erhält man für $\alpha_3 \neq 0$ Drehungen, für deren Zentrum $M(X_m, Y_m)$ und Drehwinkel ω die Formeln

¹ Emil Müller-Erwin Kruppa, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, I. Band: Die linearen Abbildungen, Leipzig und Berlin 1923; insbesondere 3. Kap., S. 240–277.

² Eduard Study, Von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Annalen **39**, 441–566 (1891).

³ Karl Strubecker, Direkte Herleitung der Darstellung der Bewegungen der Ebene durch Studysche Quaternionen. Monatsh. Math. Phys. **47**, 213–216 (1939).

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} : X_m : Y_m : 1 \quad (2)$$

gelten; für $\alpha_3 = 0$ entstehen *Schiebungen* mit dem komplexen Schiebvektor

$$\alpha = \frac{2i}{\alpha_0} (\alpha_1 + i\alpha_2) \quad (3)$$

und der halben Schieblänge

$$\frac{\Omega}{2} = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\alpha_0}. \quad (4)$$

Dem Vektor $\tilde{Z}_0 = \tilde{X}_0 + i\tilde{Y}_0$ entspricht in der Bewegung (1) der Vektor

$$\tilde{Z} = \frac{\alpha_0 - i\alpha_3}{\alpha_0 + i\alpha_3} \tilde{Z}_0 \quad \text{oder} \quad \tilde{X} + i\tilde{Y} = \frac{\alpha_0 - i\alpha_3}{\alpha_0 + i\alpha_3} (\tilde{X}_0 + i\tilde{Y}_0). \quad (5)$$

Die *kinematische Abbildung* ordnet nach *Wilhelm Blaschke*⁴ durch die Formel

$$z : x : y : 1 = \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \quad (6)$$

der *ebenen Bewegung* (1) den *Raumpunkt* $P(x, y, z)$ zu. Einer *Drehung* ($\alpha_3 \neq 0$) entspricht dabei nach (2) ein *eigentlicher Raumpunkt* P , der über dem Drehzentrum $M(X_m, Y_m)$ in der Höhe $z = -\operatorname{ctg} \omega/2$ oberhalb oder unterhalb der *Grundebene* $\pi(z=0)$ liegt. Einer *Schiebung* ($\alpha_3=0$) entspricht im Raum $\mathfrak{P}$ ein *Fernpunkt* P_u der Vektorrichtung $x : y : z = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_0$.

2. Man kann die *Bewegungen* (1) der Ebene $\pi(X, Y)$ umkehrbar eindeutig kennzeichnen durch die Lagen, welche ein *bestimmtes orientiertes Linienelement* (*Urelement*) bei ihnen annimmt. Wählt man als dieses Urelement den im Nullpunkt $Z_0 = X_0 + iY_0 = 0$ befestigten Einheitsvektor $\tilde{Z}_0 = \tilde{X}_0 + i\tilde{Y}_0 = 1$ der positiven X -Richtung, so entsteht aus ihm durch die Bewegung (1) der *im Punkte*

$$Z = X + iY = 2i \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\alpha_0 + i\alpha_3} = 2 \frac{X_m + iY_m}{1 + i\operatorname{ctg} \omega/2} \quad (7)$$

befestigte Einheitsvektor

⁴ *Wilhelm Blaschke*: a) *Euklidische Kinematik und Nichteuklidische Geometrie I/II*, Z. Math. Phys. **60**, 61–91, 203–204 (1911). — b) *Ebene Kinematik*, *Hamburger Math. Einzelschriften*, 25. Heft, Leipzig und Berlin 1938. — c) *W. Blaschke-H. R. Müller*, *Ebene Kinematik*, *Math. Einzelschriften*, Band 5, München 1956.

$$\tilde{Z} = \frac{\alpha_0 - i\alpha_3}{\alpha_0 + i\alpha_3} = \cos \omega + i \sin \omega. \quad (8)$$

Die *kinematische Abbildung* (6) ordnet nun dem *orientierten Linien-element* $(Z, \tilde{Z})$ der Ebene π umkehrbar eindeutig den *Raumpunkt* $P(x, y, z)$ von $\mathfrak{P}$ zu, wobei nach (7) und (8) die *Abbildungsformeln*

$$\left. \begin{aligned} Z = X + iY &= 2i \frac{x + iy}{z + i} = 2 \frac{x + iy}{1 - iz} \\ \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y} &= + \frac{z - i}{z + i} = - \frac{1 + iz}{1 - iz} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

bestehen, aus denen umgekehrt

$$x + iy = \frac{X + iY}{1 - \tilde{Z}}, \quad z = i \frac{1 + \tilde{Z}}{1 - \tilde{Z}} \quad (10)$$

folgt. Den Formeln (10) kann man dabei wegen (8) auch die folgende Gestalt geben:

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= \frac{i(X + iY)}{2 \sin \frac{\omega}{2} (\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2})} = \frac{1}{2}(X + iY) (1 + i \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}) \\ z &= - \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Explizit lauten die Formeln (9)

$$\left. \begin{aligned} X &= 2 \frac{x - yz}{z^2 + 1}, & Y &= 2 \frac{y + xz}{z^2 + 1} \\ \tilde{X} &= \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, & \tilde{Y} &= \frac{-2z}{z^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (9^*)$$

Die Formeln (10) lauten wegen $\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 \equiv 1$ ausführlich

$$x = \frac{X - X\tilde{X} - Y\tilde{Y}}{2(1 - \tilde{X})}, \quad y = \frac{Y + X\tilde{Y} - \tilde{X}Y}{2(1 - \tilde{X})}, \quad z = \frac{-\tilde{Y}}{1 - \tilde{X}}. \quad (10^*)$$

Dabei bedeutet wegen (8) und (11)

$$\tilde{X} = \cos \omega, \quad \tilde{Y} = \sin \omega, \quad \frac{-\tilde{Y}}{1 - \tilde{X}} = - \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}. \quad (12)$$

§ 2. Richtungskurven (orientierte Elementvereine) als kinematische Bilder von Gewindekurven

3. Einer glatten *Raumkurve* aus $\mathfrak{P}$ als Ort der Punkte $P(x, y, z)$ mit den Koordinaten

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (13)$$

entspricht als *kinematisches Bild* in der Ebene π eine glatte Schar orientierter Linienelemente

$$\left. \begin{aligned} Z(t) &= X(t) + i Y(t) = 2i \frac{x(t) + iy(t)}{z(t) + i} \\ \tilde{Z}(t) &= \tilde{X}(t) + i \tilde{Y}(t) = \frac{z(t) - i}{z(t) + i} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

deren Punktort $Z(t)$ den Tangentenvektor

$$dZ(t) = \frac{2i}{(z+i)^2} [(z dx - x dz - dy) + i(z dy - y dz + dx)] \quad (15)$$

besitzt. Dabei gilt

Satz 1: Zwei sich in einem Punkt P schneidende Raumkurven haben als kinematische Bilder zwei sich berührende Scharen orientierter Linienelemente, d. h. solche, welche ein orientiertes Linienelement (nämlich das Bildelement des Schnittpunktes P) gemeinsam haben. Berühren sich die beiden Raumkurven in einem Punkt P zweipunktig (allgemein n -punktig), so berühren sich ihre beiden orientierten Bildelementscharen zweielementig (n -elementig), d. h. so, daß sie zwei (allgemein n) benachbarte orientierte Linienelemente gemeinsam haben.

Die orientierten Linienelemente (14) schließen sich dann und nur dann zu einem die Kurve $Z(t)$ berührenden Elementverein zusammen, wenn die Vektoren $dZ(t)$ und $\tilde{Z}(t)$ proportional sind, d. h. wenn ihr Außenprodukt $[dZ, \tilde{Z}]$, das ist der Imaginärteil des Produktes $(\tilde{Z} \cdot dZ)$, verschwindet, also

$$[\tilde{Z}, dZ] = \begin{vmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ dX & dY \end{vmatrix} = \Im(\tilde{Z} \cdot dZ) = 0 \quad (16)$$

gilt, wobei $\tilde{\tilde{Z}} = \tilde{X} - i\tilde{Y}$ ist und $\Im$ den Imaginärteil bedeutet. Man findet aus (14) und (15) für (16) die *Mongesche Gleichung*

$$dy = z dx - x dz \quad (17)$$

und den

Satz 2: Notwendig und hinreichend dafür, daß die orientierten kinematischen Bildelemente (14) der Punkte $P(x, y, z)$ einer Raumkurve (13) in der Bildebene π einen (orientierten) Elementverein bilden, ist die Bedingung (17), die besagt, daß die Raumkurve (13) mit ihren Tangenten dem Gewinde (linearen Komplex)

$$p_{02} = p_{31} \quad (18)$$

angehört, das wir als das *Nebengewinde* der kinematischen Abbildung bezeichnen.

Orientierte Elementvereine, die nicht bloß aus den orientierten Linienelementen eines festen Punktes bestehen, bezeichnen wir als *Richtungskurven*.

Aus Satz 1 folgt dann

Satz 3: Zwei sich in einem Punkt P schneidende Gewindekurven des Nebengewindes (17) besitzen als kinematische Bilder zwei orientierte Elementvereine (*Richtungskurven*), die sich im Bildelement von P berühren. Berühren sich die beiden Gewindekurven des Nebengewindes (17) im Punkt P genau n -punktig, so berühren sich ihre orientierten kinematischen Bildvereine im Bildelement von P genau $(n+1)$ -punktig. Einer gewöhnlichen Berührung der Gewindekurven entspricht eine Oskulation ihrer orientierten Bildvereine.

4. Auch alle orientierten Linienelemente eines festen Punktes $Z_0 = X_0 + i Y_0$ der Ebene bilden einen Elementverein, dem nach (11) der im Nebengewinde (17) enthaltene *Gewindestrahl* der Darstellung

$$x + iy = \frac{1}{2} (X_0 + i Y_0) (1 + i \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}), \quad z = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \quad (19)$$

entspricht, ausführlich

$$x = \frac{1}{2} (X_0 - Y_0 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}), \quad y = \frac{1}{2} (Y_0 + X_0 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}), \quad z = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}. \quad (20)$$

Wegen der aus (20) folgenden Relation

$$dx = y dz - z dy \quad (21)$$

gehören die Geraden (19), welche punktförmige Elementvereine als kinematische Bilder besitzen, dem Nebengewinde (18) und dem Gewinde

$$p_{01} = p_{23} \quad (22)$$

an, das als das *Hauptgewinde* der kinematischen Abbildung bezeichnet wird. Insgesamt folgt

Satz 4: Die punktförmigen Elementvereine der Ebene π sind die kinematischen Bilder der Strahlen des elliptischen Drehnetzes

$$p_{01} = p_{23}, \quad p_{02} = p_{31} \quad (23)$$

(Schnittnetz von Hauptgewinde und Nebengewinde), des sogenannten Grundnetzes der kinematischen Abbildung.

Die Strahlen des *Grundnetzes* (23), welche eine *Raumkurve* (13) schneiden, haben als kinematische Bilder punktförmige Elementvereine, deren Träger der *Punktort der orientierten Elementenschar* (14) ist. Einem die Raumkurve (13) berührenden Strahl des *Grundnetzes* (23) und seinem Berührungspunkt entspricht dabei ein *Rückkehrpunkt* des Punktortes und ein *Rückkehrerlement* der orientierten Elementenschar (14).

§ 3. Speere und Zykel als kinematische Bilder von Gewindestrahlen

5. Die orientierten Linienelemente $(Z, \tilde{Z})$ des *Speeres* mit der *Hesseschen* Gleichung

$$-X \sin \omega + Y \cos \omega + p = 0 \text{ oder } \Im(\tilde{Z}, Z) + p = 0 \quad (24)$$

sind in dessen Punkten

$$Z = X + iY = (t - ip)(\cos \omega + i \sin \omega) \quad (25)$$

($t = \text{Parameter}$) befestigt und haben den *festen Richtungsvektor*

$$\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y} = \cos \omega + i \sin \omega = \text{const.} \quad (26)$$

Nach (10) entsprechen diesen Speeren *Raumgeraden* mit der Parameterdarstellung

$$x + iy = \frac{p + it}{2} (\text{ctg } \frac{\omega}{2} + i), \quad z = -\text{ctg } \frac{\omega}{2} = \text{const} \quad (27)$$

oder mit den aus (10) und (24) folgenden Gleichungen

$$\Im[\tilde{Z}(1 - \tilde{Z})(x + iy)] + p = 0 \text{ oder } \Im[(\tilde{Z} - 1)(x + iy)] + p = 0,$$

d. h. ausführlich

$$x \cos \frac{\omega}{2} + y \sin \frac{\omega}{2} = \frac{p}{2 \sin \frac{\omega}{2}}, \quad z = -\text{ctg } \frac{\omega}{2} = \text{const.} \quad (28)$$

Für diese Raumgeraden gelten daher die Gleichungen

$$dy = z dx - x dz \quad \text{und} \quad dz = 0. \quad (29)$$

Somit folgt

Satz 5: Die orientierten Linienelemente der *Speere* der Ebene π sind die kinematischen Bilder der Geraden des parabolischen Netzes mit den Gleichungen

$$p_{02} = p_{31}, \quad p_{03} = 0, \quad (30)$$

des sogenannten *Nebennetzes* der kinematischen Abbildung.

Die *Strahlen* des *Nebennetzes* (30), welche eine *Raumkurve* (13) schneiden, haben als kinematische Bilder die zu den orientierten Bildelementen (14) der Punkte der *Raumkurve* gehörenden *Speere*. Einem die *Raumkurve* (13) *zweipunktig berührenden* Strahl des *Nebennetzes* (30) und seinem Berührungspunkt entspricht dabei ein *Wendespeer* bzw. ein orientiertes *Wendeelement* der Schar der orientierten Bildelemente (14).

6. Die reelle (zweimal stetig differenzierbare) *Speerschar*

$$-X \sin \omega + Y \cos \omega + p(\omega) = 0 \quad (31)$$

erzeugt als *Hüllgebilde* den *Verein der orientierten Linienelemente*

$$\left. \begin{aligned} Z &= X + iY = -i(p + ip')(\cos \omega + i \sin \omega) \\ \tilde{Z} &= \tilde{X} + i\tilde{Y} = \cos \omega + i \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Wegen

$$\begin{aligned} dZ &= dX + i dY = (p + p'')(\cos \omega + i \sin \omega) d\omega = \\ &= (p + p'')(\tilde{X} + i\tilde{Y}) d\omega = (p + p'')\tilde{Z} d\omega \end{aligned} \quad (33)$$

berühren nämlich die *Linienelemente* $(Z, \tilde{Z})$ die *Kurve* Z in (32). Der *Verein der orientierten Linienelemente* (32) ist nach (11) das kinematische Bild der *Raumkurve*

$$x + iy = \frac{1}{2}(p + ip')(\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} + i), \quad z = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad (34)$$

welche wegen $\Im(\tilde{Z}.dZ) = \Im(p + p'') = 0$ dem *Nebengewinde* (17) angehört. Die *Tangentenspeere* (31) der orientierten Linie (32) sind dabei die kinematischen Bilder jener *Gewindestrahlen* des parabolischen *Nebennetzes* (30), welche die *Gewindekurve* (34) schneiden und eine *parabolische Netzfläche* Φ bilden, auf der die *Gewindekurve* (34) *Schmieglinie* ist. Einem *Wendespeer* (31) der *Richtungskurve* (32) entspricht dabei im Raum ein *Netzstrahl* aus dem *Nebennetz* (30), der die *Gewindekurve* (34) *berührt*, einem *Flachspeer* (31) der *Richtungskurve* (32) entspricht ein *Netzstrahl* aus (30), der für die *Gewindekurve* (34) *Wendetangente* ist.

7. Für den *Sonderfall*

$$p = p(\omega) = r + \xi \sin \omega - \eta \cos \omega \quad (35)$$

(mit konstantem r, ξ, η) erhält man wegen $p + p'' = r$ einen *orientierten Kreis* (*Zykel*) vom Radius r , für dessen orientierte *Linienelemente* man aus (32) die Formeln

$$X + iY = (\xi + i\eta) - ir(\cos \omega + i \sin \omega), \quad \tilde{X} + i\tilde{Y} = \cos \omega + i \sin \omega \quad (36)$$

findet, dessen Mitte also im Punkte $\xi + i\eta$ liegt.

Dieser Zykel ist wegen

$$p + ip' = r + \frac{i(\xi + i\eta)}{\cos \omega + i \sin \omega} \quad (37)$$

nach (34) das kinematische Bild der im Nebengewinde (17) enthaltenen Geraden der Darstellung

$$x + iy = \frac{1}{2} [r (\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} + i) + (\xi + i\eta) (1 + i \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2})], \quad z = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \quad (38)$$

oder ausführlich

$$x = \frac{\xi}{2} + \frac{r - \eta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad y = \frac{r + \eta}{2} + \frac{\xi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad z = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad (39)$$

für deren Linienkoordinaten man die Formeln

$$\left. \begin{aligned} p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = \\ = (r - \eta) : \xi : -2 : -(r + \eta) : \xi : \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2 - r^2) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

findet. Daraus folgt für den *Zykelradius* r der Ausdruck

$$r = -\frac{p_{01} - p_{23}}{p_{03}} = -\frac{dx - ydz + zdz}{dz}. \quad (41)$$

8. Die projektiven Automorphismen des Nebengewindes (17) bilden eine zehngliedrige Gruppe G_{10} . Die Transformationen dieser G_{10} vertauschen die Strahlen des Nebengewindes unter Erhaltung ihrer Inzidenz. Wegen Satz 1 und Satz 4 folgt daraus⁵ der

Satz 6: *Der Gruppe G_{10} der projektiven Transformationen des Nebengewindes in sich im Raume $\mathfrak{P}$ entspricht in der kinematischen Abbildung die zehngliedrige Gruppe Γ_{10} der Lieschen Kreisverwandtschaften in π , welche Zykel in Zykel (Speere und Nullzykel eingeschlossen) verwandeln und die (gleichsinnige) Berührung von Zykeln erhalten. Der Untergruppe G_7 der Projektivitäten aus G_{10} , welche das Nebennetz (30) festlassen, entspricht dabei in π die siebengliedrige Laguerresche Untergruppe Γ_7 von Γ_{10} , die Speere in Speere verwandelt (Laguerresche Kreisverwandtschaften). Der Untergruppe G_6 von G_{10} , welche das Grundnetz (23) festläßt, entspricht in π die sechsgliedrige Möbiussche Untergruppe Γ_6 von Γ_{10} , die Nullzykel (Punkte) in Nullzykel (Punkte) verwandelt (Möbiussche Kreisverwandtschaften).*

⁵ Karl Strubecker, Kinematik, Liesche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation, Elemente der Mathematik 8, 4–13 (1953).

§ 4. Allgemeine Darstellung der Gewindekurven und der Richtungskurven

9. Man kann die im *Nebengewinde* (17) enthaltenen glatten *Gewindekurven* mittels einer willkürlichen Funktion $U(u)$ der Klasse C^2 durch die Formeln

$$x = U'(u), \quad y = u U'(u) - 2 U(u), \quad z = u \quad (42)$$

darstellen. Diese Formeln versagen nur für die im parabolischen Nebennetz (30) enthaltenen (horizontalen) Geraden, bei denen $z = \text{const.}$ ist, (und für die in der Fernebene liegenden Gewindestrahlen), deren kinematische Bilder nach Satz 5 orientierte Geraden (Speere) sind. Die Gewindekurven (42) haben als kinematische Bilder nach Satz 2 *orientierte Elementvereine* (orientierte Linien, *Richtungskurven*⁶), deren Punkte und Linienelemente nach (9) lauten

$$\left. \begin{aligned} X + i Y &= 2 \frac{(1 + iu) U' - 2 iU}{1 - iu} = \\ &= \frac{2}{1 + u^2} [(1 - u^2) U' + 2 uU + 2 i(uU' - U)] \\ \tilde{X} + i \tilde{Y} &= \frac{u - i}{u + i} = \frac{(u^2 - 1) - 2 iu}{1 + u^2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Somit gilt der

Satz 7: Jede glatte *Richtungskurve* kann durch die Formeln (43) beschrieben werden, in denen $U = U(u)$ eine willkürliche Funktion der Klasse C^2 bedeutet. Die *Richtungskurve* ist dabei das kinematische Bild der *Kurve* (42) des *Nebengewindes* (17).

Aus (43) folgt noch

$$\begin{aligned} dX + i dY &= 2 \frac{(1 + u^2) U'' - 2 uU' + 2 U}{(1 - iu)^2} du \\ &= - \frac{2 du}{1 + u^2} [(1 + u^2) U'' - 2 uU' + 2 U] \cdot \tilde{Z}, \end{aligned} \quad (44)$$

so daß das *Bogenelement* dS der *Richtungskurve* (43) *radikalfrei* durch die Formel ausdrückbar ist

⁶ Diese *allgemeinen Richtungskurven* (43) sind wohl zu unterscheiden von den sogenannten *Laguerreschen Richtungskurven* [E. Laguerre, Oeuvres, Band II, 646, 671, Paris 1905]. Die Formeln (43) stellen eine *Laguerresche Richtungskurve* dar, wenn $U = U(u)$ eine *rationale Funktion* von u ist. Das trifft bei allen im folgenden betrachteten *Berührungsfiguren* zu, bei denen U ein *Polynom* in u ist.

$$dS = -2 \frac{(1 + u^2) U'' - 2 u U' + 2 U}{1 + u^2} du. \quad (45)$$

Positives dS bedeutet, daß $Z = X + iY$ in Richtung von $\tilde{Z}$ fortschreitet.

Weil $d\omega = \frac{2 du}{1+u^2}$ den Kontingenzwinkel der Tangenten der Richtungskurve (43) bedeutet, findet man für ihren *Schmieglekreisradius* R an der Stelle u die Formel

$$R = \frac{dS}{d\omega} = - [(1 + u^2) U''(u) - 2 u U'(u) + 2 U(u)]. \quad (46)$$

10. Ist zum Beispiel

$$U(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \quad (47)$$

ein *quadratisches Polynom* mit konstanten Vorzahlen, so erhält man aus (42) die ∞^3 (nicht horizontalen) *Strahlen des Nebengewindes* (17)

$$x = a_1 + 2 a_2 u, \quad y = -(2 a_0 + a_1 u), \quad z = u, \quad (48)$$

als deren *kinematische Bilder* man nach (43) die orientierten Linien

$$X + i Y = 2 \frac{(a_1 - 2 i a_0) + (2 a_2 - i a_1) u}{1 - i u}$$

erhält oder ausführlicher, wenn man $u = -\operatorname{ctg} \omega/2$ einträgt, die Linien

$$X = 2[a_1 - (a_2 + a_0) \sin \omega], \quad Y = 2[(a_2 - a_0) + (a_2 + a_0) \cos \omega]. \quad (49)$$

Das sind wieder die ∞^3 *orientierten Kreise (Zykel)* der Ebene π , deren orientierte Linienelemente die Richtungsvektoren $\tilde{X} + i \tilde{Y} = \cos \omega + i \sin \omega$ besitzen, und deren Mittelpunkte M_0 und Radien R lauten

$$M_0 = (2 a_1, 2(a_2 - a_0)), \quad R = -2(a_2 + a_0). \quad (50)$$

Im *Sonderfall*

$$a_2 + a_0 = 0 \text{ oder } U(u) = a_1 u + a_2(u^2 - 1) \quad (51)$$

umhüllen diese orientierten Linienelemente einen *Nullzykel* ($R = 0$) nämlich den Punkt $M_0 = (2 a_1, 4 a_2)$. Nach (45) verschwindet wegen

$$(1 + u^2) U'' - 2 u U' + 2 U = 0 \quad (52)$$

das Bogenelement ($dS \equiv 0$). Die zugehörigen *Gewindestrahlen* (48) der Darstellung

$$x + i y = (a_1 + 2 i a_2) (1 - i u), \quad z = u \quad (53)$$

sind Strahlen des *Grundnetzes* (23), die mit den Strahlen (19) identisch werden, wenn man dort $X_0 = 2a_1$, $Y_0 = 4a_2$ und $-\operatorname{ctg} \omega/2 = u$ setzt.

Zusammenfassend folgt

Satz 8: *Den Strahlen des Nebengewindes (17) entsprechen in der kinematischen Abbildung die Zyklen (orientierten Kreise) der Ebene π . Insbesondere entsprechen den Strahlen des Grundnetzes (23) die Nullzyklen (Satz 4) und den Strahlen des Nebennetzes (30) die Sphäre (orientierten Geraden) von π (Satz 5).*

§ 5. Berührungsfiguren 1. Ordnung (Tangente und Schmiegyzykel)

11. Ist die Funktion $U(u)$ in der Umgebung der Stelle u_0 analytisch, also für $|u - u_0| < \rho$ von der Gestalt

$$U(u) = U_0 + U_0'(u - u_0) + U_0'' \frac{(u - u_0)^2}{2!} + U_0''' \frac{(u - u_0)^3}{3!} + \dots, \quad (54)$$

so gehört zu ihr im Raum $\mathfrak{P}$ eine bestimmte analytische *Kurve* (42) des *Nebengewindes* (17) und in der Ebene π als deren *kinematisches Bild* eine bestimmte analytische *orientierte Linie* (*Richtungskurve* k) der Darstellung (43).

Die quadratischen Glieder der Entwicklung (54), welche die Gestalt von (47) haben mit

$$a_0 = U_0 - U_0' u_0 + U_0'' u_0^2/2, \quad a_1 = U_0' - U_0'' u_0, \quad a_2 = U_0''/2, \quad (55)$$

liefern dann im Raume $\mathfrak{P}$ nach (42) und (48) die *Tangente*

$$x = U_0' + U_0''(u - u_0), \quad y = (U_0' u_0 - 2U_0) + (U_0'' u_0 - U_0')(u - u_0), \quad z = u \quad (56)$$

der *Gewindekurve* (42) im Punkte $u = u_0$, die ebenfalls im *Nebengewinde* (17) liegt. In der Ebene π erhält man als kinematisches Bild dieser Tangente (56) den *orientierten Schmiegykreis* (*Schmiegyzykel*) der *Richtungskurve* (43) im Punkte $u = u_0$; Mittelpunkt M_0 und Radius R_0 dieses Schmiegyzykels lauten nach (50)

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \{2(U_0' - U_0'' u_0), (U_0'' - 2U_0) + 2U_0' u_0 - U_0'' u_0^2\} \\ R_0 &= -[(U_0'' + 2U_0) - 2U_0' u_0 + U_0'' u_0^2]. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

12. Um zu bestätigen, daß der orientierte Kreis (57) wirklich der *Schmiegyzykel* der *Richtungskurve* (43) im Punkte u_0 ist, benutzt man am besten die Darstellung der *Evolute* $Z_m(t) = X_m(t) + i Y_m(t)$ der ebenen Kurve $Z(t) = X(t) + i Y(t)$ in (14) durch die bekannte Formel

$$Z_m = Z + 2 Z' \frac{(Z' \cdot \bar{Z}')}{\begin{vmatrix} Z' & \bar{Z}' \\ Z'' & \bar{Z}'' \end{vmatrix}}, \quad (58)$$

in der Striche Ableitungen nach dem Kurvenparameter t bedeuten. Weil in unserem Fall die orientierte Kurve (14) ein Elementverein ist und ihr Raumbild dem Nebengewinde (17) angehört, wird $y' - x'z + xz' \equiv 0$; daher ist

$$\left. \begin{aligned} Z' = X' + i Y' &= 2 \frac{x' + zy' - yz'}{(1 - iz)^2} \\ Z'' = X'' + i Y'' &= 4 iz' \frac{x' + zy' - yz'}{(1 - iz)^3} + 2 \frac{x'' + zy'' - yz''}{(1 - iz)^2} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Daraus folgt übrigens für das *Bogenelement* dS der Richtungskurve (14) die radikalfreie Darstellung

$$dS = - \frac{2}{1 + z^2} (dx + z dy - y dz). \quad (60)$$

Für die *Evolute* (58) der *Richtungskurve* (14) folgt daraus die Darstellung

$$Z_m = Z - \frac{x' + y'z - z'y}{z'} \cdot N \quad (61)$$

wobei $N = i \tilde{Z} = -i \cdot \frac{1 + iz}{1 - iz}$ den *Normalenvektor* der Linie Z bedeutet.

Daher ist

$$R = - \frac{x' + y'z - z'y}{z'} \quad (62)$$

der *Schmiegykelradius* der Richtungskurve (14) und für ihre *Evolute* $Z_m = X_m + i Y_m$ ergibt sich nach den ausführlichen Formeln (9*) die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} X_m &= \frac{1}{1 + z^2} \left[2(x - yz) - 2z \frac{x' + y'z - z'y}{z'} \right] \\ Y_m &= \frac{1}{1 + z^2} \left[2(y + xz) + (1 - z^2) \frac{x' + y'z - z'y}{z'} \right] \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Wegen (62) besitzt das orientierte Bild (14) der Nebengewindekurve *Spitzen* ($R = 0$) an Stellen mit $x' + y'z - z'y = 0$; diese Stellen entsprechen solchen Punkten der Nebengewindekurve (13), deren *Tangenten* dem *Grundnetz* (23) angehören.

Liegt diese Tangente dagegen im *Nebennetz* (30), d. h. ist für sie $z' = 0$ (horizontale Tangente der Gewindekurve), dann wird R unendlich groß; die orientierte Kurve (14) besitzt dann einen *Wendespeer*.

Trägt man in die Formel (62) und (63) die Darstellung (42) der Nebengewindekurve ein, so erhält man für den *Mittelpunkt* $M = (X_m, Y_m)$ und *Radius* R des *Schmiegyzyls* ihrer orientierten kinematischen Bildkurve das Ergebnis

$$\left. \begin{aligned} X_m &= 2(U' - uU''), & Y_m &= (U'' - 2U) + 2uU' - u^2U'' \\ R &= -[(U'' + 2U) - 2uU' + u^2U''], \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

das an der Stelle $u = u_0$ mit (57) übereinstimmt.

§ 6. Berührungsfiguren 2. Ordnung. (Kubische Gewindeparabel, Cayleysche Regelfläche, Laguerre-Zykel 3. Klasse)

13. Eine genauere lokale Annäherung der Kurve (42) des Nebengewindes (17) an der Stelle u_0 erhält man, wenn man in der Entwicklung (54) der Funktion $U(u)$ auch noch das kubische Glied berücksichtigt. Man kann dann die Gewindekurve (42) durch die folgende, sie an der Stelle u_0 *oskulierende kubische Parabel* k_3

(65)

$$\left. \begin{aligned} x &= U'_0 + U''_0(u - u_0) + U'''_0 \frac{(u - u_0)^2}{2} \\ y &= (u_0 U'_0 - 2U_0) + (u_0 U''_0 - U'_0)(u - u_0) + u_0 U'''_0 \frac{(u - u_0)^2}{2!} + U'''_0 \frac{(u - u_0)^3}{3!} \\ z &= u \end{aligned} \right\}$$

ersetzen, die ebenfalls dem *Nebengewinde* (17) angehört, und mit der Gewindekurve (42) an der Stelle u_0 eine *dreipunktige Berührung* (Berührung zweiter Ordnung) eingeht. Die orientierten Bilder der Gewindekurven (42) und (65) berühren sich daher an der Stelle u_0 in *drei benachbarten orientierten Linienelementen* (in einem *Linienelement dritter Ordnung*).

Die kubische Parabel (65) berührt im Fernpunkt Y_u der y -Achse die Leitgerade $e_u = [X_u Y_u]$ des parabolischen Nebennetzes (30) und besitzt dort die Fernebene $\varepsilon_u = [X_u Y_u Z_u]$ als Schmiegeebene. Die e_u *schneidenden Schmiegstrahlen der kubischen Parabel* (65) bilden eine im Nebennetze (30) enthaltene *Cayleysche Regelfläche 3. Ordnung* Φ_3 mit dem Kuspidalpunkt Y_u , der (torsalen) Leitgeraden e_u und der

Torsalebene ϵ_u . Die kubische Parabel (65) ist dabei eine Schmieglinie der Cayleyschen Fläche Φ_3 .

Legt man allgemein durch die Punkte der Gewindekurve (42) die Strahlen des parabolischen Nebennetzes (30), so entsteht die *parabolische Netzfläche* Φ

$$x = U'(u) + v, \quad y = uU'(u) - 2U(u) + uv, \quad z = u \quad (66)$$

mit der Gleichung

$$y - xz + 2U(z) = 0. \quad (67)$$

Die Gleichung der oben genannten (sie längs der Erzeugenden $u = u_0$ in dritter Ordnung berührenden) *Cayleyschen Regelfläche* 3. Ordnung Φ_3 entsteht daraus, wenn man für $U(z)$ die wegen $u=z$, $u_0=z_0$ aus (54) folgende Entwicklung

$$U(z) = U_0 + U_0'(z - z_0) + U_0'' \frac{(z - z_0)^2}{2!} + U_0''' \frac{(z - z_0)^3}{3!} + \dots \quad (68)$$

einträgt und nach dem Gliede dritter Ordnung abbricht.

14. Die *projektiven Transformationen der kubischen Parabel* (65) in sich bilden eine dreigliedrige Gruppe G_3 , die auch das zugehörige Nullsystem, also auch das Nebengewinde (17) festläßt. Dieser G_3 entspricht als kinematisches Bild in π nach Satz 6 eine dreigliedrige Gruppe Γ_3 von *Lieschen Kreisverwandtschaften*, welche das kinematische Bild der kubischen Parabel in sich transformieren.

In der Gruppe G_3 steckt eine zweigliedrige Untergruppe G_2 von *Affinitäten*, welche die kubische Parabel (65) und das Nebengewinde (17) festlassen. Bei G_2 bleibt der Fernpunkt Y_u der kubischen Parabel (65), ihre Tangente $e_u = [X_u Y_u]$ und ihre Schmiegeebene $\epsilon_u = [X_u Y_u Z_u]$ in Y_u fest, folglich auch das parabolische Nebennetz (30) und die Cayleysche Regelfläche Φ_3 . Das Produkt von G_2 mit der eingliedrigen Gruppe G_1 der *parabolischen Schiebungen des Nebennetzes* (30) in sich, bei denen die Raumpunkte auf Netzstrahlen verschoben werden, ergibt die *gesamte Gruppe* G_3' der Affinitäten, welche die Cayleysche Fläche Φ_3 in sich überführen. Die kubische Parabel (65) bleibt jedoch bei dieser Gruppe G_1 nicht fest, weshalb wir uns im folgenden auf die Gruppe G_2 beschränken. Das *kinematische Bild der affinen Gruppe* G_2 in π ist wegen der Invarianz des Nebennetzes (30) eine zweigliedrige Gruppe Γ_2 von *Laguerreschen Transformationen*, welche das kinematische Bild der kubischen Parabel in sich transformieren. Dieses Bild ist daher ein *Laguerrescher Hyperzykel* aus der Familie VI

der Einteilung von *W. Blaschke*⁷, ein sogenannter *Laguerre-Zykel*⁸.

Also gilt

Satz 9: *Das kinematische Bild der im Nebengewinde (17) liegenden kubischen Parabel (65) und der Cayleyschen Regelfläche Φ_3 der sie treffenden Strahlen des Nebennetzes (30) ist ein Laguerrescher Zykel und das System der orientierten Linienelemente seiner Tangentenspeere.*

Ferner gilt:

Satz 10: *Die Richtungskurve (43), das kinematische Bild der Nebengewindekurve (42), besitzt an jeder Stelle u_0 einen sie in drei aufeinanderfolgenden orientierten Linienelementen berührenden Laguerre-Zykel, nämlich das kinematische Bild der kubischen Parabel (65) aus dem Nebengewinde (17), welche die Kurve (42) an der Stelle u_0 dreipunktig berührt.*

15. Um diese geometrischen Überlegungen auch rechnerisch zu stützen, nehmen wir (ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit) $u_0 = 0$ und $U_0 = U_0' = U_0'' = 0, U_0''' \neq 0$ an und setzen also

$$U(u) = U_0''' \frac{u^3}{3!} + \dots \quad (69)$$

Die mit diesem $U(u)$ gebildete Nebengewindekurve (42) besitzt dann an der Stelle $u_0 = 0$ die sie in zweiter Ordnung (dreipunktig) berührende *kubische Schmiegeparabel*

$$x = U_0''' \frac{u^2}{2}, \quad y = U_0''' \frac{u^3}{6}, \quad z = u, \quad (70)$$

die ebenfalls dem Nebengewinde (17) angehört. Die im Nebennetz (30) enthaltenen (horizontalen) Schmiegestrahlen der Kubik (70) bilden nach (67) und (68) die *Cayleysche Regelfläche Φ_3* mit der Gleichung

$$y - xz + \frac{1}{3} U_0''' z^3 = 0, \quad (71)$$

auf der die kubische Parabel (70) *Schmiegeinie* ist.

Die *kinematische Abbildung* überträgt die Punkte der *parabolischen Netzfläche* (66) auf das *Feld der orientierten Linienelemente* mit den Koordinaten

⁷ *Wilhelm Blaschke*, Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Ebene, Monatsh. Math. Phys. 21, 1–60 (1910).

⁸ *Wilhelm Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie III (Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln), bearbeitet von *Gerhard Thomsen*, Berlin 1929, § 39.

$$X+iY=2\frac{(U'(u)+v)(1+iu)-2iU(u)}{1-iu}, \quad \tilde{X}+i\tilde{Y}=-\frac{1+iu}{1-iu}, \quad (72)$$

die auf den *Speeren* mit den *Hesseschen* Gleichungen

$$\frac{2u}{1+u^2}X + \frac{u^2-1}{1+u^2}Y - \frac{4U(u)}{1+u^2} = 0 \quad (73)$$

liegen (kinematische Bilder der *Erzeugenden* der Netzfläche). Diese *Speerschar* umhüllt nach (43) die *Richtungskurve* mit den Linienelementen

$$\left. \begin{aligned} X &= 2 \frac{(1-u^2)U' + 2uU}{1+u^2}, & Y &= 4 \frac{uU' - U}{1+u^2} \\ \tilde{X} &= \frac{u^2-1}{1+u^2}, & \tilde{Y} &= \frac{-2u}{1+u^2} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

die auch aus (72) für $v=0$ entsteht (kinematisches Bild der *Gewindekurve* (42)).

Ersetzt man in diesen Formeln $U(u)$ durch $U_0''' u^3/3!$, so erhält man die diese Figuren an der Stelle $u_0=0$ in dritter Ordnung berührenden Figuren; insbesondere ergibt sich so aus (74) die *Laguerresche Richtungskurve*

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{U_0''' u^2}{1+u^2} \left(1 - \frac{u^2}{3}\right), & Y &= \frac{4 U_0'''}{1+u^2} \cdot \frac{u^3}{3} \\ \tilde{X} &= \frac{u^2-1}{1+u^2}, & \tilde{Y} &= \frac{-2u}{1+u^2} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

welche die *Richtungskurve* (74) an der Stelle $u_0=0$ in dritter Ordnung (mit drei gemeinsamen Nachbarspeeren) annähert. Diese bezüglich der X -Achse symmetrische *Laguerresche* *Richtungskurve* ist ein *Laguerre-Zykel*, dessen *Punktort* die zirkuläre *algebraische Kurve 4. Ordnung* (Abb. 1)

$$3(X^2 + Y^2)Y^2 - 2U_0'''X(8X^2 + 9Y^2) - 9U_0'''Y^2 = 0 \quad (76)$$

ist, die als *Tangentenort* von 3. Klasse ist. Jeder Strahl s des Grundnetzes (23) trifft nämlich *drei* Erzeugende der kubischen *Cayleyschen* Fläche (71), deren kinematische Bilder in π *drei* im Bildpunkt (Nullzykel) von s zusammenlaufende Tangentenspeere des *Laguerre-Zykels* sind, der seinerseits als Ort von Punkten (Nullzykeln) von den die *Cayleysche* Fläche berührenden Strahlen des Grundnetzes her stammt. Der *Laguerre-Zykel* besitzt den Nullpunkt ($u=0$) als *Spitze*

mit der negativen X -Richtung ($\tilde{X} = -1$, $\tilde{Y} = 0$) als orientierter Spitzentangente. Diese Spitze hat ihre Ursache darin, daß die kubische Parabel (70) im Punkte $u = 0$ (Nullpunkt) einen Strahl des Grund-

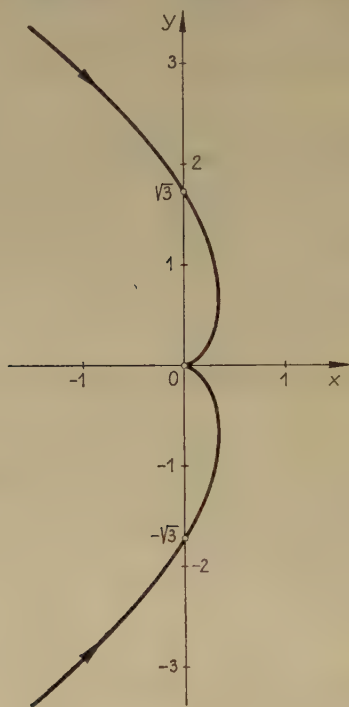


Abb. 1. *Laguerre-Zykel* 3. Klasse ($U_0''' = 1$)

netzes (23), nämlich die z -Achse, berührt, der zugleich Schmiegtangente der Cayleyschen Fläche ist. Diese Spitze bedeutet für den Laguerre-Zykel als *Speerort* keine Singularität.

§ 7. Affine, Liesche und Laguerresche Automorphismen der Figuren 2. Ordnung

16. Die dreigliedrige stetige Gruppe G'_3 der Affinitäten, welche die Cayleysche Regelfläche Φ_3 der Darstellung (71) in sich überführen, kann man folgendermaßen schreiben

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma + \beta^2 x + U_0''' \alpha \beta z \\ y' &= (\alpha \gamma - \frac{1}{3} U_0''' \alpha^3) + \alpha \beta^2 x + \beta^3 y + \beta \gamma z \\ z' &= \alpha + \beta z \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

wobei für die Parameter α , $\beta \neq 0$ und γ die *Produktformeln*

$$\alpha'' = \alpha\beta' + \alpha', \quad \beta'' = \beta\beta', \quad \gamma'' = \beta'^2\gamma + \gamma' + U_0''' \alpha\alpha'\beta' \quad (78)$$

bestehen⁹.

Die stetige Gruppe G'_3 besitzt den *Keim*

$$\left. \begin{aligned} U_1 f &= U_0''' z \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \\ U_2 f &= 2x \frac{\partial f}{\partial x} + 3y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \\ U_3 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

wobei für die *Poissonschen Klammern* $[U_i U_k] = U_i(U_k) - U_k(U_i)$ die Formeln gelten

$$[U_1 U_2] = U_1, \quad [U_2 U_3] = -2 U_3, \quad [U_3 U_1] = 0. \quad (80)$$

17. Die zu U_1 gehörige infinitesimale Transformation erzeugt die stetige *eingliedrige affine Gruppe* G_1 der Darstellung

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} U_0''' \alpha^2 + x + U_0''' \alpha z \\ y' &= \frac{1}{6} U_0''' \alpha^3 + \alpha x + y + \frac{1}{2} U_0''' \alpha^2 z \\ z' &= \alpha + z \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

mit der Produktregel $\alpha'' = \alpha + \alpha'$, die im Raum von den Automorphismen $u' = u + \alpha$ der kubischen Parabel (70) hervorgerufen wird und in der dreigliedrigen Gruppe (77) für $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{2} U_0''' \alpha^2$ enthalten ist. Bei der Gruppe (81) bleiben *nur Fernelemente fest*, nämlich der Kuspidealpunkt Y_u , die Torsalgerade $e_u = [X_u Y_u]$ und die Torsalebene $\varepsilon_u = [X_u Y_u Z_u]$ der *Cayleyschen Fläche* (71), die selbst entsteht, wenn man die x -Achse der Gruppe (81) unterwirft. Alle Punkte $P_\xi = (\xi, 0, 0)$ der x -Achse beschreiben dabei als *Bahnen kubische Parabeln* der Darstellung

$$x = \frac{1}{2} U_0''' \alpha^2 + \xi, \quad y = \frac{1}{6} U_0''' \alpha^3 + \alpha\xi, \quad z = \alpha, \quad (82)$$

die auf der *Cayleyschen Fläche* (71) *Schmieglinien* sind, von der Schar *parabolischer Zylinder* $x - \frac{1}{2} U_0''' z^2 = \text{const}$ ausgeschnitten werden und unter denen für $\xi = 0$ die kubische Parabel (70) vorkommt.

⁹ Die Transformationen (77) lassen sich als *nichteuklidische Bewegungen* (*Schraubungen*) auffassen. Damit kann man die Struktur der Gruppe G'_3 und ihrer eingliedrigen Untergruppen besonders einfach übersehen. Vgl. dazu *Karl Strubecker*, Über nichteuklidische Schraubungen, Monatsh. Math. Phys. 38, 63–84 (1931), insbes. Satz 23.

18. Die zu U_2 gehörige infinitesimale Transformation erzeugt die stetige *eingliedrige affine Untergruppe* G'_1 der Darstellung

$$x' = \beta^2 x, \quad y' = \beta^3 y, \quad z' = \beta z \quad (83)$$

mit der Produktregel $\beta'' = \beta \beta'$, die im Raum von den Automorphismen $u' = \beta u$ der kubischen Parabel (70) hervorgerufen wird und in der dreigliedrigen Gruppe (77) für $\alpha = \gamma = 0$ enthalten ist. Bei der affinen Gruppe (83) bleibt das zum *Nullpunkt* O und *Fernpunkt* Y_u gehörige *Schmiegtetraeder* der kubischen Parabel (70) *fest*. Auf der *Cayleyschen Fläche* (71) bleibt daher außer ihren Fernelementen $(Y_u, e_u, \varepsilon_u)$ auch noch der Nullpunkt O , die x -Achse $e_0 = [OX_u]$ (Erzeugende) und die Ebene $\varepsilon_0 = [OX_u Z_u]$ (Tangentenebene $y = 0$) fest. Die *Cayleysche Fläche* trägt eine *stetige Schar kubischer Bahnkurven* (83), die alle dasselbe Schmiegtetraeder besitzen, aus ihr von den *Quadriken* des Büschels $xz - y = \text{const}$ ausgeschnitten werden, und unter denen allein die kubische Parabel (70) Schmieglinie ist.

Die zu U_3 gehörige infinitesimale Transformation erzeugt die *eingliedrige affine Untergruppe* G''_1 der Darstellung

$$x' = \gamma + x, \quad y' = y + \gamma z, \quad z' = z \quad (84)$$

mit der Produktregel $\gamma'' = \gamma + \gamma'$, die in der dreigliedrigen Gruppe (77) für $\alpha = 0, \beta = 1$ enthalten ist und aus den *parabolischen Schiebungen* besteht, bei denen die Raumpunkte auf den Strahlen des *parabolischen Nebennetzes* (23) verschoben werden, deren Fernpunkte dabei die einzigen Fixpunkte sind. Durch die Gruppe (84) wird die kubische Parabel (70) mit den anderen *Schmieglinien* der *Cayleyschen Fläche* (71) vertauscht, was auch daraus folgt, daß nach (80) die Gruppen (81) und (84) vertauschbar sind ($[U_1 U_3] = 0$). Diese beiden Gruppen erzeugen zusammen eine *kommutative zweigliedrige Gruppe*, die in (77) für $\beta = 1$ enthalten ist und welche die eigentlichen Punkte der *Cayleyschen Fläche* (71) untereinander transitiv vertauscht.

Die beiden Gruppen (83) und (84) erzeugen wegen $[U_2 U_3] = -2 U_3$ eine *nicht kommutative zweigliedrige Gruppe*, die auf der *Cayleyschen Fläche* (71) nicht völlig transitiv ist, weil die Punkte der x -Achse nur untereinander vertauscht werden, und die in der dreigliedrigen Gruppe (77) für $\alpha = 0$ enthalten ist.

19. Die beiden Gruppen (81) und (83) erzeugen schließlich wegen $[U_1 U_2] = U_1$ eine ebenfalls *nicht kommutative zweigliedrige affine Gruppe* G_2 , die in (77) für $\gamma = \frac{1}{2} U_0''' \alpha^2$ enthalten ist und die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} U_0''' \alpha^2 + \beta^2 x & + U_0''' \alpha \beta z \\ y' &= \frac{1}{6} U_0''' \alpha^3 + \alpha \beta^2 x + \beta^3 y & + \frac{1}{2} U_0''' \alpha^2 \beta z \\ z' &= \alpha & + \beta z \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

hat ($\beta \neq 0$). Diese Gruppe G_2 vertauscht die Punkte der *Cayleyschen* Fläche (71) untereinander *transitiv*, *ausgenommen die Punkte der kubischen Parabel* (70), *welche untereinander vertauscht werden*, wobei jeweils

der auf ihr für $u = \frac{\alpha}{1 - \beta}$ entstehende Punkt (für $\beta = 1$ der Fernpunkt Y_u) festbleibt.

Dies ist die schon in 14. erwähnte *zweigliedrige Gruppe G_2 von Affinitäten*, *welche die* (nunmehr normierte) *kubische Parabel* (70) *und das Nebengewinde, also auch das Nebennetz* (30) *festlassen*. Ihr kinematisches Bild ist die *zweigliedrige Gruppe Γ_2 Laguerrescher Kreisverwandtschaften*, *welche den Laguerre-Zykel* (75) *festlassen*. Das Feld der auf seinen Tangentenspeeren liegenden orientierten Linienelemente (72) wird dabei durch eine *dreigliedrige Gruppe Γ_3 von Lieschen Kreisverwandtschaften* in sich transformiert, nämlich durch das kinematische Bild der Gruppe G_3 der Affinitäten (77), *welche die Cayleysche Fläche* (71) *festlassen*. Die analytische Darstellung dieser Gruppe ist aus unseren Formeln leicht zu gewinnen.

20. Wir wollen noch die *zweigliedrige Laguerresche Gruppe Γ_2* darstellen, *welche die Speere des Laguerre-Zykels* (75) *untereinander vertauscht*.

Zu diesem Zwecke bilden wir die *Speere* (24) der *Laguerreschen Ebene* (kinematischen Bildebene) π auf die *Punkte*

$$\xi = -\sin \omega, \quad \eta = \cos \omega, \quad \zeta = p \quad (86)$$

des *Kreiszyinders*

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \quad (87)$$

ab, und übertragen diese Punkte (ξ, η, ζ) durch die Formeln

$$\xi = \frac{-2u}{u^2 + 1}, \quad \eta = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{-4v}{u^2 + 1} \quad (88)$$

auf die Punkte $P^*(u, v)$ einer *isotropen Ebene* π^* (mit der einzigen Isotropenschar $u = \text{const}$), die wir noch mit den *dualen Zahlen*

$$w = u + \varepsilon v \quad (\varepsilon^2 = 0) \quad (89)$$

belegen. Die eigentlichen *Laguerreschen Speer-Transformationen* in π bilden dann eine Gruppe Γ_6 (die man zu einer Gruppe Γ_7 erweitern

kann). Deren Bilder sind auf dem Kreiszylinder (87) projektive Gruppen G_6 bzw. G_7 und in der isotropen Ebene π^* Gruppen G_6^* bzw. G_7^* von Punkttransformationen, welche die *parabolischen Kreise* der Ebene π^* , d. h. die Parabeln

$$v = ru^2 + 2su + t \quad (90)$$

untereinander vertauschen (*isotrope Kreisverwandtschaften*). Man kann G_6^* durch die dualen linear-gebrochenen Transformationen

$$u' + \varepsilon v' = \frac{(\alpha + \varepsilon \bar{\alpha}) + (\beta + \varepsilon \bar{\beta})(u + \varepsilon v)}{(\gamma + \varepsilon \bar{\gamma}) + (\delta + \varepsilon \bar{\delta})(u + \varepsilon v)} \quad (91)$$

beschreiben und G_7^* durch die Transformationen

$$u' + \varepsilon v' = \frac{(\alpha + \varepsilon \lambda \bar{\alpha}) + (\beta + \varepsilon \lambda \bar{\beta})(u + \varepsilon \lambda v)}{(\gamma + \varepsilon \lambda \bar{\gamma}) + (\delta + \varepsilon \lambda \bar{\delta})(u + \varepsilon \lambda v)}, \quad (92)$$

die regulär sind, wenn der Realteil ihrer Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist.

Das Bild der Schar der Tangentenspeere (73) der *Richtungskurve* (74) besteht dann auf dem Drehzylinder (87) nach (88) aus der *Kurve*

$$\xi = \frac{-2u}{u^2 + 1}, \quad \eta = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{-4U(u)}{u^2 + 1} \quad (93)$$

und in der isotropen Ebene π^* aus der *Linie*

$$v = U(u). \quad (94)$$

21. Im *Sonderfall* $U(u) = \frac{1}{6} U_0''' u^3$ erhält man als Bild des *Laguerre-Zykels* (75) auf dem Zylinder (87) die *kubische Raumkurve*

$$\xi = \frac{-2u}{u^2 + 1}, \quad \eta = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad \zeta = -\frac{2U_0'''}{3} \cdot \frac{u^3}{u^2 + 1} \quad (95)$$

(*kubischer Kreis*) und in der isotropen Ebene π^* die *ebene kubische Parabel*

$$v = \frac{1}{6} U_0''' u^3. \quad (96)$$

Der Gruppe G_2 der *affinen Automorphismen* (85) des Nebennetzes, welche die im Nebengewinde (17) enthaltene *räumliche kubische Parabel* (70) in sich überführen und deren kinematisches Bild die *Laguerresche Gruppe* Γ_2 der *Automorphismen des Laguerre-Zykels* (75) ist, entspricht dann in der isotropen Ebene π^* eine in der erweiterten Gruppe G_7^* enthaltene Gruppe G_2^* von *isotropen Kreisverwandtschaften*, welche die *ebene kubische Parabel* (96) in sich überführen.

Für diese Gruppe G_2^* findet man leicht die in (92) enthaltene duale Darstellung

$$u' + \varepsilon v' = \frac{\alpha(1 + \varepsilon \alpha^2 U_0'''/6) + \beta(u + \varepsilon \beta^2 v)}{1 - \varepsilon \alpha \beta U_0'''(u + \varepsilon \beta^2 v)/2} \quad (97)$$

oder explizit

$$\left. \begin{aligned} u' &= \alpha + \beta u, \\ v' &= 1/6 U_0''' (\alpha^3 + 3 \alpha^2 \beta u + 3 \alpha \beta^2 u^2) + \beta^3 v. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Diese Gruppe G_2^* , deren Transformationen für $\beta \neq 1$ den einzigen eigentlichen Fixpunkt

$$u_0 = \frac{\alpha}{1 - \beta}, \quad v_0 = \frac{U_0''' \alpha^3}{6(1 - \beta)^3} \quad (99)$$

haben, ist das isotrope Abbild der affinen Gruppe G_2 in (85) und enthält als Bild der Gruppe G_1 in (81) als Untergruppe G_1^* für $\beta = 1$ jene isotropen Kreisverwandtschaften ohne eigentlichen Fixpunkt, welche den *eigentlichen Laguerre-Transformationen* der Gruppe Γ_1 entsprechen, die den *Laguerre-Zykel* (75) in sich verwandeln und dabei keinen Tangentenspeer festlassen.

Diese Gruppe Γ_1 ergibt, durch *isotrope Projektion* in den euklidischen Raum übertragen, eine *komplexe kubische Schraubung*¹⁰ (sog. *Lyonsche Schraubung*). Dem *Laguerre-Zykel* und seinen Tangentenspeeren entspricht dabei eine *kubische isotrope Schraublinie* und die Schar ihrer (isotropen) Schmiegebene.

§ 8. Gewindeparabeln, parabolische Netzflächen und Laguerre-Zykel höherer Ordnung

22. Man kann einige unserer Betrachtungen auf den Fall $n \geq 4$ ausdehnen. Der Kürze halber erwähnen wir aber nur den Fall

$$U(u) = U_n u^n, \quad (n \geq 4) \quad (100)$$

der auf die im Nebengewinde (17) liegende *Gewindekurve* n . *Ordnung* (*Gewindeparabel* k_n)

$$x = n U_n u^{n-1}, \quad y = (n-2) U_n u^n, \quad z = u \quad (101)$$

führt, die ebenso wie die kubische Parabel (70) eine *W-Kurve* ist, nämlich die *eingliedrige affine Gruppe* G_1

$$x' = \beta^{n-1} x, \quad y' = \beta^n y, \quad z' = \beta z \quad (102)$$

¹⁰ Ausführlicheres darüber bei *Karl Strubecker*, Differentialgeometrie, Band I (Kurventheorie der Ebene und des Raumes), Sammlung Göschel 1113/1113a, Berlin 1955, Kap. II, 9. Bem. 3., sowie Band III (Flächenkrümmung), Sammlung Göschel 1180/80a, Berlin 1959, Kap. IV, 40. Beisp. 1.

gestattet. Ihre im Nebennetz (30) enthaltenen Schmiegestrahlen bilden die *parabolische Netzfläche* n . Ordnung Φ_n mit der Gleichung

$$y - xz + 2 U_n z^n = 0, \quad (103)$$

welche eine *nichtkommutative zweigliedrige Gruppe* G_2 von *affinen Automorphismen*

$$x' = \alpha + \beta^{n-1}x, \quad y' = \beta^n y + \alpha\beta z, \quad z' = \beta z \quad (104)$$

gestattet, deren Keim

$$U_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y}, \quad U_2 f = (n-1)x \frac{\partial f}{\partial x} + ny \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (105)$$

ist, wobei die Vertauschungsrelation

$$[U_1 U_2] = (n-1) U_1 \quad (106)$$

gilt. Man kann diese Affinitäten (104) als *nichteuklidische Bewegungen* (*Schraubungen*) auffassen, weil sie die Quadrik $y - xz = 0$ festlassen. Die Flächen (103) gestatten daher eine zweigliedrige Gruppe (104) von *nichteuklidischen Bewegungen* und sind unter diesem Gesichtswinkel von mir schon bei früherer Gelegenheit¹⁰ studiert worden.

Die *kinematische Abbildung* überträgt die Gewindekurven (101) auf *Laguerresche Richtungskurven* n . Klasse κ_n (*Laguerre-Zykel* n . Klasse), deren Darstellung nach (74) lautet

$$\left. \begin{aligned} X &= 2 U_n \frac{[n - (n-2) u^2] u^{n-1}}{1 + u^2}, \quad Y = 4 U_n \frac{(n-1) u^n}{1 + u^2} \\ \tilde{X} &= \frac{u^2 - 1}{1 + u^2}, \quad \tilde{Y} = \frac{-2u}{1 + u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Ihr *Bogenelement* dS besitzt wegen

$$(1 + u^2) U'' - 2uU' + 2U = (n-1) U_n [n + (n-2) u^2] u^{n-2} = -R \quad (108)$$

nach (45) die rationale Gestalt

$$dS = - \frac{2(n-1) U_n}{1 + u^2} [n + (n-2) u^2] u^{n-2} du. \quad (109)$$

R ist der Schmiegekreisradius der Richtungskurve (107).

Den *Erzeugenden* der parabolischen Netzfläche n . Ordnung (103) entsprechen die *Tangentenspeere* der Richtungskurve (107) und den *Punkten* dieser Netzfläche die *orientierten Linienelemente* dieser Speere.

Die affinen Gruppen G_1 in (102) und G_2 in (104) führen dabei auf Gruppen Γ_1 und Γ_2 von *Lieschen Kreisverwandtschaften*, welche die

orientierten Linienelemente der Richtungskurve κ_n bzw. das auf den Tangentenspeeren von κ_n liegende Feld orientierter Linienelemente in sich überführen. Unter den Speeren von κ_n wird dabei eine *eingliedrige Gruppe Laguerrescher Automorphismen* hervorgerufen, durch welche die *Laguerresche Richtungskurve* κ_n als Speerort erzeugt werden kann.

23. Im *Sonderfall* $n = 4$ ergibt (101) eine im Nebengewinde (17) enthaltene *rationale Raumkurve vierter Ordnung* k_4 der Darstellung

$$x = 4 U_4 u^3, \quad y = 2 U_4 u^4, \quad z = u, \quad (110)$$

die *zwei Wendepunkte* besitzt (in O und Y_u), und deren im Nebennetz (30) enthaltene Schmiegestrahlen die *parabolische Netzfläche 4. Ordnung* Φ_4 mit der Gleichung

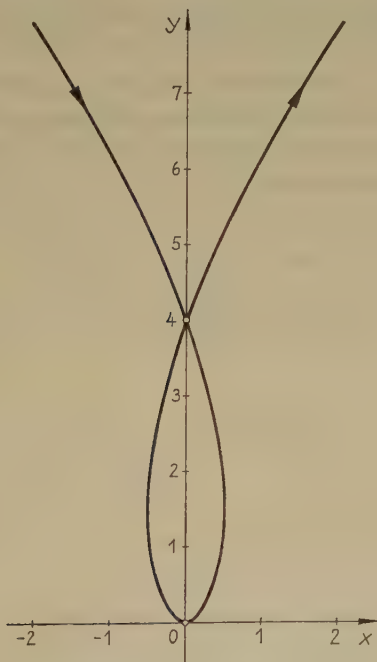


Abb. 2. *Laguerre-Zykel 4. Klasse* ($U_4 = 1/4$)

$$y - xz + 2 U_4 z^4 = 0 \quad (111)$$

erzeugen, d. i. nach ¹¹ eine *Vossische Regelfläche*.

¹¹ *Karl Strubecker*, Über Flächen mit zweigliedriger nichteuklidischer Bewegungsgruppe, *Monatsh. Math. Phys.* **44**, 51–59 (1936). — Vgl. auch die Arbeit in Fußnote ⁹, insbes. S. 82–84.

Als *kinematische Bilder* der Erzeugenden dieser *Voss'schen Fläche* erhält man in der Ebene π die Tangentenspeere einer *Laguerreschen Richtungskurve 4. Klasse* κ_4 , deren orientierte Linienelemente

$$\left. \begin{aligned} X &= 4 U_4 \frac{(2 - u^2) u^3}{1 + u^2}, & Y &= 4 U_4 \frac{3 u^4}{1 + u^2} \\ \tilde{X} &= \frac{u^2 - 1}{1 + u^2}, & \tilde{Y} &= \frac{-2 u}{1 + u^2} \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

als Punktort die (bezüglich der Y -Achse symmetrische) *rationale Kurve 5. Ordnung* (Abb. 2)

$$(X^2 + Y^2) Y^3 - 4 U_4 (27 X^4 + 36 X^2 Y^2 + 8 Y^4) + 256 U_4^2 Y^3 = 0 \quad (113)$$

besitzen. Auch dieser *Laguerre-Zykel 4. Klasse* κ_4 gestattet eine eingliedrige Gruppe Γ_1 von *Laguerreschen* Speertransformationen in sich, die der erweiterten *Laguerreschen* Gruppe Γ_7 angehören und nach isotroper Projektion zu einer eingliedrigen Gruppe euklidischer Ähnlichkeiten des komplexen euklidischen R_3 mit algebraischen (rationalen) Bahnkurven 4. Ordnung führen.

Buchbesprechungen

Lectures on Linear Algebra. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics Number 9.) Von *I. M. Gel'fand*. IX, 185 S. New York und London: Interscience Publishers, Inc. 1961. Geb. \$ 6.—.

Das Buch ist eine Übersetzung aus dem Russischen auf Grund der russischen Auflage von 1951, deren Anhang aber weggelassen wurde. Die Grundtatsachen der linearen Algebra werden in gut lesbarer Form entwickelt, so daß das Buch als Einführung bestens geeignet ist. Die einzelnen Kapitel: I. n -dimensionale Räume. Linear- und Bilinearformen. II. Lineare Transformationen. III. Die kanonische Form einer beliebigen Lineartransformation. IV. Einführung in die Tensoralgebra.

W. Nöbauer, Wien

Elements of Linear Spaces. Von *A. R. Amir-Moéz* und *A. L. Fass*. Mit 36 Textabb., VII, 149 S. Ann Arbor: Edwards Brothers. 1961.

Diese Einführung in die lineare Algebra geht aus von der Geometrie des reellen euklidischen Raumes in zwei bzw. drei Dimensionen. Die grundlegenden Begriffe und Sätze werden zunächst für diesen Fall entwickelt. Dann werden sie auf n -dimensionale unitäre Räume übertragen. Schließlich werden auch Vektorräume über beliebigen Körpern behandelt. Das Schlußkapitel bringt Sätze über Eigenwerte von linearen Transformationen unitärer Räume. Zu jedem Abschnitt findet man zahlreiche, meist leichte Übungsaufgaben.

W. Nöbauer, Wien

Solution of Equations and Systems of Equations I. Von *A. M. Ostrowski*. Mit 6 Textabb., IX, 202 S. (Pure and Applied Mathematics.) New York-London: Academic Press Inc. 1960. \$ 6.80.

Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Autor über Einladung in den USA gehalten hat. Es handelt von numerischen Methoden zur Lösung von Gleichungen. Die meisten Methoden benutzen die Theorie der Interpolation. Insbesondere wird die inverse Interpolation viel verwendet. Sehr ausführlich werden die Regula falsi und die Newtonsche Methode behandelt. Mit besonderer Sorgfalt werden Konvergenzuntersuchungen und Fehlerabschätzungen durchgeführt. Manches davon hat der Autor schon früher in Zeitschriften dargestellt, aber zahlreiche Sätze und Beweise werden in dem Buch zum ersten Mal veröffentlicht.

N. Hofreiter, Wien

Théorie de la dimension dans les anneaux de polynomes. Von *P. Jaffard*. 78 S. Paris: Gauthier-Villars. 1960.

Die Dimension eines allgemeinen kommutativen Ringes kann nach *Krull* durch die maximale Länge der in diesem Ringe vorhandenen Primidealketten definiert werden. In der vorliegenden Monographie wird eine sehr genaue und

spezielle Untersuchung über die Dimension von Polynomringen $A^{(n)}$ in n Variablen durchgeführt, die über einem kommutativen Ring A mit Einselement gebildet sind. Mit bewertungstheoretischen Methoden wird die auf Krull und Seidenberg zurückgehende Ungleichung

$$n + \dim A \leq \dim A^{(n)} \leq (1 + \dim A)n + \dim A$$

neu begründet und hinsichtlich ihrer Gültigkeit geprüft. Besonderes Augenmerk wird auf den Fall gerichtet, wo an der ersten Stelle das Gleichheitszeichen richtig ist (dazu gehören u. a. alle Noetherschen Ringe).

W. Gröbner, Innsbruck

O wielkich liczbach. Von E. Vietrose. 113 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1960. Brosch. zł 10.—.

Was man mit elementarsten zahlentheoretischen Mitteln über die Eigenschaften großer Zahlen erschließen kann, vermittelt der Autor in diesem Büchlein in anregender Weise. Nach einer Aufgabe über die Anzahl der Ziffern der Zahl 99^9 folgt einiges über Kongruenzen, die Eulersche φ -Funktion und über die Endziffern der genannten Zahl. Es folgen einige Sätze und numerische Ergebnisse über Primzahlen, Zahlen der Form $a^n \pm 1$, Eigenschaften von $\varphi(a^n - b^n)$ und ähnliches, die Summe der Teiler, vollkommene Zahlen, den kleinen Fermatschen Satz und seine Umkehrung. Zum Beispiel ein Satz folgender Art: „Wenn überhaupt ungerade, nicht durch 3 teilbare, vollkommene Zahlen existieren, so hat die erste mindestens zwanzig Ziffern“ gibt ein typisches Beispiel für die Art des Zahlenzaubers, der in diesem Büchlein betrieben wird. Für jeden, der daran Freude hat, ist dies eine sehr empfehlenswerte Lektüre. Eine Übersetzung ins Deutsche wäre vielleicht wünschenswert.

K. Prachar, Wien

Ingenieur-Mathematik. (Band 2: Differentialgleichungen und Funktionentheorie.) Von R. Sauer. Mit 95 Textabb., XI, 180 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1961. Geb. DM 18.—.

Der hier vorliegende zweite Band des Kompendiums der Mathematik für Ingenieure bringt nach einem kurzen Abschnitt über Vektorenanalyse eine Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen (die partiellen werden am Beispiel der Wellengleichung nur gestreift) und in die Funktionentheorie, vornehmlich in die konforme Abbildung. Die knappe, aber immer klare Darstellung der für den Praktiker wichtigen Begriffe und Sätze wird auch diesen Band für den angesprochenen Personenkreis sehr nützlich machen, zumal immer wieder auch numerisch durchgerechnete Beispiele und numerische Methoden eingestreut werden.

H. Hornich, Wien

Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen. Von G. Alexits. 307 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Geb. DM 31.80.

In dem vorliegenden Buch gibt der Verfasser eine Darlegung des derzeitigen Standes der Konvergenz- und Summationstheorie allgemeiner Orthogonalreihen. Im ersten Kapitel bringt er die grundlegenden Definitionen und Sätze und betrachtet dann einige wichtige spezielle Orthogonalsysteme, wie das trigonometrische, die Jacobischen Polynome und die Systeme von Haar, Rademacher und Walsh. Im zweiten Kapitel werden die Konvergenzeigenschaften von Orthogonalreihen mit reihentheoretischen Mitteln untersucht. Nach einem kurzen Abschnitt über allgemeine Summationsverfahren und einigen Sätzen über

Cesàro- und *Abel*verfahren folgt der fundamentale Konvergenzsatz von *Rademacher* und *Menchoff*. Der nächste Abschnitt bringt einen tiefliegenden Satz von *Tandori* über überall divergente Orthogonalreihen. Dann folgen Sätze über unbedingte Konvergenz, sowie die Analoga zu den Sätzen von *Rademacher* — *Menchoff* und *Tandori* für den Fall der *Cesàro*- und *Abel*verfahren. Außerdem wird die Konvergenz und *Cesàro*-Summation von lückenhaften Reihen behandelt. Das Kapitel schließt mit einem Resultat über orthogonale Universalarreihen. Im dritten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen dem Konvergenzverhalten von Orthogonalentwicklungen und der Größenordnung ihrer Lebesgueschen Funktionen studiert. Nach einem Satz von *Kaczmarz* und Anwendungen auf klassische Orthogonalsysteme folgen Sätze des Verfassers über multiplikativ orthogonale Systeme. Dann wird noch auf *Cesàro*-Summation und die Größenordnung der Lebesgueschen Funktionen eingegangen. Das vierte Kapitel ist schließlich den klassischen Konvergenzproblemen gewidmet und beginnt mit einigen Sätzen über lineare Funktionale in Banachräumen und über singuläre Integrale. Dann werden die Konvergenz und *Cesàro*-Summation der Orthogonalentwicklungen integrierbarer Funktionen an Stetigkeitsstellen bzw. in Lebesgueschen Punkten untersucht. Hierauf werden noch Approximationseigenschaften einiger Orthogonalsysteme sowie die absolute Konvergenz von Orthogonalreihen betrachtet.

Besonders hervorzuheben sind einerseits die klare Darstellung in allen Teilen des Buches, andererseits die Notizen am Ende eines jeden Abschnittes, wo kurz auf die historische Entwicklung der Problemstellungen und Beweisideen eingegangen wird und noch ungelöste Probleme aufgeworfen werden. Das Buch kann jedem empfohlen werden, der sich für die allgemeine Theorie der Orthogonalreihen interessiert und die Grundbegriffe der Lebesgueschen Integrationstheorie beherrscht.

J. Cigler, Wien

Verallgemeinerte Funktionen. (Distributionen.) Von *I. M. Gelfand* und *G. E. Schilow*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 47.) Mit 7 Textabb., 364 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Geb. DM 37.—.

Seit dem Erscheinen der Monographie „Théorie des Distributions“ von *L. Schwartz* erlangte die Theorie der Distributionen eine große Popularität. Dazu trug wesentlich die weite Anwendungsfähigkeit dieser Theorie in der Physik und in vielen Gebieten innerhalb der Mathematik bei. Das vorliegende Werk, dem eine Reihe weiterer Bände folgen soll, vermittelt einen Überblick über die große Anzahl mathematischer Probleme, die sich mit Hilfe der Distributionen — oder wie sie hier genannt werden — der verallgemeinerten Funktionen behandeln lassen. Wegen der Fülle des Stoffes soll hier nur auf die wichtigsten Abschnitte des Buches eingegangen werden. Das erste Kapitel beginnt mit der Definition und den einfachsten Eigenschaften der verallgemeinerten Funktionen. Dann wird auf Differentiation und Integration sowie auf Fragen der Regularisierung von Funktionen mit algebraischen Singularitäten näher eingegangen. Die Bedeutung der Faltung verallgemeinerter Funktionen wird durch mehrere Anwendungen auf die Lösung von Differential- und Integralgleichungen illustriert. Das zweite Kapitel behandelt die Fouriertransformation von Distributionen. Nach den wichtigsten allgemeinen Sätzen und vielen durchgerechneten Beispielen wird die Überlegenheit dieser Theorie über die klassische Fourier- und Laplace-transformation und Operatorenrechnung an Hand typischer Anwendungen dargelegt. Das dritte Kapitel ist speziellen Typen verallgemeinerter Funktionen gewidmet. Zuerst werden die Distributionen, die auf einer glatten Fläche kon-

zentriert sind, behandelt. U. a. wird eine einfache Herleitung der Greenschen Formel gebracht. Dann werden ausführlich verallgemeinerte Funktionen betrachtet, die mit einer quadratischen Form verknüpft sind. Zum Schluß wird noch auf homogene verallgemeinerte Funktionen und auf die Untersuchung der Potenzen beliebiger Funktionen eingegangen.

Um die Darstellung dieses Bandes leichter lesbar zu machen, wird oft auf Beweise verzichtet. Diese sollen im zweiten Band nachgetragen werden. Am Ende des Buches wurden die wichtigsten Definitionen und Formeln noch einmal zusammengestellt. Es ist zu hoffen, daß bald auch die weiteren Bände erscheinen und damit eine Lücke in der Lehrbuchliteratur geschlossen wird. *J. Cigler*, Wien

Quasikonforme Abbildungen. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge Heft 26.) Von *H. P. Künzi*. Mit 35 Textabb., VIII, 182 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Brosch. DM 39.—.

Die zu immer größeren Bedeutung gelangenden quasikonformen Abbildungen finden hier zum ersten Mal eine zusammenfassende, fast lehrbuchartige Darstellung. Zunächst werden — nach einer Einführung über die Moduln, die Normalgebiete nach *Grötzsch* und *Teichmüller* und die *Teichmüllerschen* Modulsätze im Bereich der konformen Abbildung — die stetig differenzierbaren *K*-quasikonformen Abbildungen nach *Grötzsch* und dann die allgemeineren *K*-quasikonformen Homöomorphismen und auch die nicht eindeutigen Abbildungen untersucht. Weitere Abschnitte gelten den von *Teichmüller* angeregten Problemen der extremalen quasikonformen Abbildungen sowie den pseudoanalytischen Funktionen; den Abschluß bildet der Abbildungssatz von *Lavrentieff* für quasikonforme Abbildungen.

H. Hornich, Wien

Existenzprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungen. Von *H. Hornich*. Mit 5 Textabb., 57 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Brosch. DM 8.50.

Es wird hier eine sehr interessante und tiefgehende Untersuchung über lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung in zwei unabhängigen Variablen: $a u_x + b u_y = c$ durchgeführt, wobei nur vorausgesetzt wird, daß die Koeffizienten a, b, c der Differentialgleichung in einem gewissen Gebiet G der xy -Ebene als stetige Funktionen gegeben sind. Würde man von der Lösung u verlangen, daß sie in G stetige Ableitungen u_x und u_y besitze, so wären, wie *Perron* gezeigt hat, schon verhältnismäßig einfache Differentialgleichungen der angegebenen Art unlösbar. Daher legt der Verf. einen verallgemeinerten Lösungsbegriff zugrunde, d. h. er verlangt von der Lösung u nur, daß sie in G stetig sei und lediglich in Richtung eines „Lösungsweges“ (Charakteristik): $dx:dy = a:b$ eine Ableitung besitze, die der Differentialgleichung genügt. Für diesen verallgemeinerten Lösungsbegriff beweist der Verf. einen allgemeinen Existenzsatz, und zwar hängt die Existenz einer Lösung von zwei Bedingungen ab: einer topologischen Bedingung, nämlich daß in G keine geschlossenen Lösungswege existieren dürfen, und einer metrischen Bedingung, daß die Länge der Lösungswege in einer gewissen Weise beschränkt sein müsse. Instruktive Beispiele weisen die Notwendigkeit dieser Bedingungen auf; bemerkenswert erscheint auch ein Beispiel einer Differentialgleichung, die in keinem noch so kleinen Teilgebiet von G lösbar ist, weil es geschlossene Lösungswege gibt. Schließlich werden diese Ergebnisse auf gewisse nicht lineare Differentialgleichungen und auf Systeme von Differentialgleichungen verallgemeinert.

W. Gröbner, Innsbruck

Konstruktive Geometrie in der Technik. Von *F. Hohenberg*. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 459 Textabb., IX, 319 S. Wien: Springer-Verlag. 1961. Brosch. S 150.—, DM 25.—, sfr 25.60, \$ 5.95, £ 2/2/6. Geb. S 174.—, DM 29.—, sfr 29.70, \$ 6.90, £ 2/9/6.

Das vorliegende Buch ist eine erweiterte und neu bearbeitete Auflage der 1956 erschienenen „Konstruktive Geometrie für Techniker“ (ausführliche Besprechung: Mh. 60, 348, 1956). Die Notwendigkeit einer zweiten Auflage nach so kurzer Zeit beweist die große Beliebtheit, die nicht zuletzt in der Fülle der angeführten technischen Anwendungsbeispiele begründet ist. Außer einigen Umordnungen im Text, Ergänzungen neuerer Literatur und Umgestaltung einzelner Abbildungen sind vor allem die inhaltlichen Erweiterungen, die etwa 50 Seiten, 27 Textabbildungen sowie 36 Beispiele ausmachen, von Interesse. So wurde etwa eine kurze Einführung in die perspektive Kollineation zwischen räumlichen Figuren und die Reliefperspektive hinzugefügt, die Darstellung der Kreisabbildung und des Einschnideverfahrens in Perspektive, sowie der Abschnitt über Schraubflächen erweitert. Die entscheidenden Ergänzungen betreffen jedoch kinematische Fragen: Hier sind der Satz von *Roberts*, Abschnitte über geschlossene Trochoiden und Wattsche Kurven, eine erweiterte Darstellung der Krümmungstheorie von Bahn- und Hüllkurven sowie eine Besprechung wichtiger Trochoidenmaschinen hinzugekommen, wo auch die geometrischen Grundlagen des Wankelmotors untersucht sind. Am Schluß jedes Kapitels werden nun Übersichtsfragen an den Leser gestellt, die es gestatten, in prägnanter Form den Stoff zu wiederholen.

Für diese Neuauflage gilt in vermehrtem Maße, was sich im Lauf der letzten Jahre für die Erstauflage erwiesen hat: Für die Studierenden eines technischen Faches wie auch für den fertigen Ingenieur ist dieses Lehrbuch der Darstellenden Geometrie in hervorragender Weise geeignet. *H. Brauner, Stuttgart*

Ciekawy Szczęsian. Von *A. Ehrenfeuchtowa*. Mit 63 Textabb., 108 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1960. Geb. zł 20.—.

Dies ist ein Büchlein über verschiedene Merkwürdigkeiten des Würfels, welche in dieser im guten Sinne populären Darstellung in anregender Weise zusammengefaßt sind. Es beginnt mit dem Beweis des Eulerschen Polyedersatzes, beschäftigt sich mit den Symmetrieebenen und Symmetriechsen des Würfels, mit der Drehgruppe des Würfels, mit seinen ebenen Schnitten, bringt verschiedene Fragen über gefärbte Würfel, Zerlegung von Würfeln in Teile, die gewissen Bedingungen genügen und schließt mit der Behandlung der Aufgabe, wie man einen größeren Würfel durch einen kleineren „hindurchschieben“ kann. Zahlreiche sorgfältig gezeichnete Figuren, die, mit einer blau-roten Brille betrachtet, plastisch erscheinen, illustrieren den Text des unterhaltenden und sehr ehrreichen Büchleins. *K. Prachar, Wien*

Funktionengleichungen der Theorie der geometrischen Objekte. Von *J. Aczél* und *S. Golab*. 172 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1960.

Die Theorie der „Geometrischen Objekte“ versucht verschiedene Dinge unter einen einheitlichen Begriff — eben das geometrische Objekt — einzuordnen. Ein solches hat mehrere Komponenten, für die bei gewissen gegebenen Transformationen eines Raumes oder Teiles eines Raumes gewisse Transformationsregeln gelten sollen. Trotz der großen Allgemeinheit dieses Begriffes kann man doch verschiedene Aussagen machen und sowohl geometrische Tatsachen (unter anderem aus der Tensoranalysis und der Lie'schen Ableitungen) einheitlich

darstellen als auch neue interessante Fragestellungen erhalten. Zur Behandlung einer solchen Fragestellung können oft Funktionalgleichungen mit Vorteil verwendet werden, insbesondere zur Vermeidung von Differentierbarkeitsannahmen, die manchmal nicht in der Natur der Sache liegen. Inhalt: Einleitung. Klassifikationstheorie. Algebra der Objekte. Kovariante Ableitung. Weitere Probleme (Komitanten, Lie'sche Ableitung). — Das Buch setzt keine besonderen Vorkenntnisse voraus und wird jedem, der sich für diese abstrakten — und manchmal etwas formalen — Fragen interessiert, eine wertvolle Einführung vermitteln.

K. Prachar, Wien

Einige Untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im Großen. (Mathematische Forschungsberichte.) Von A. W. Pogorelow. 69 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Brosch. DM 14.—.

Das Ziel dieses Forschungsberichtes ist die Übertragung des von H. Weyl aufgeworfenen Problems der Einbettbarkeit eines zweidimensionalen Riemannschen Raumes in einen dreidimensionalen Euklidischen Raum auf den Riemannschen Raum. Es zeigt sich, daß eine Einbettbarkeit eines zweidimensionalen geschlossenen Riemannschen Raumes regulärer Metrik in einem dreidimensionalen Riemannschen Raum regulärer Metrik stets möglich ist, wenn eine gewisse Ungleichung erfüllt ist, in die nur die Krümmungen der beiden Räume eingehen; diese Einbettung besteht mit derselben Willkürlichkeit wie im euklidischen Fall. Aus diesem Hauptsatz können Ergebnisse über stetige Verbiegungen, über Einbettung von Mannigfaltigkeiten mit Rand, sowie über den Fall irregulärer Metrik gefolgert werden. Im Rahmen der Untersuchungen stellen sich naturgemäß eine Reihe von Hilfssätzen ein, die jedoch zum Teil auch selbständiges Interesse verdienen. So wird die Frage nach der Starrheit geschlossener Flächen mit positiver äußerer Krümmung geklärt, Abschätzungen für die Normalkrümmungen einer Fläche gefunden, die nur von den Metriken abhängen, sowie ebensolche Abschätzungen für die Ableitungen der Raumkoordinaten eines Flächenpunktes nach den Flächenkoordinaten.

Dieser Bericht ist 1957 in russischer Sprache erschienen; die Fülle der erzielten Ergebnisse sowie die Meisterschaft in sprachlicher und methodischer Hinsicht beweisen aufs neue die Qualität der russischen differentialgeometrischen Forschung.

H. Brauner, Stuttgart

Continuous Geometry. Von J. von Neumann. Foreword by I. Halperin. XI, 299 S. Princeton: Princeton University Press. 1960. Geb. \$ 7.50.

J. von Neumann hat die Theorie der kontinuierlichen Geometrien in den Jahren von 1935 bis 1937 entwickelt. Von seinen Resultaten hat er aber nur kurze Zusammenfassungen veröffentlicht, ihre vollständige Darstellung lag bisher lediglich in Form von vervielfältigten Manuskripten einer Vorlesung über dieses Gebiet vor, welche er von 1935 bis 1937 in Princeton gehalten hat. Diese Manuskripte erscheinen nun hier in Buchform. Der erste Teil geht aus von den Axiomen der kontinuierlichen Geometrie und gibt schließlich die Konstruktion der Dimensionsfunktion, der zweite behandelt die Darstellungen der kontinuierlichen Geometrien durch Idealverbände, der dritte beschäftigt sich mit Verallgemeinerungen der kontinuierlichen Geometrien.

Abgesehen von seinem Wert als Darstellung der Grundgedanken einer wichtigen mathematischen Theorie ist das Buch ein glänzendes Zeugnis für die schöpferische Kraft seines im Jahre 1957 verstorbenen Verfassers. W. Nöbauer, Wien

Topologische Lineare Räume I. Von *G. Köthe*. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 107.) XII, 456 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. DM 73.50.

Die Bedeutung der Vektorräume von endlicher und unendlicher Dimension für alle Zweige der Mathematik von Analysis bis zur numerischen Mathematik und Quantenphysik ist wohlbekannt. Die Theorie hat seit dem grundlegenden Werk von *S. Banach* eine rasche, in den letzten Jahrzehnten sogar eine stürmische Entwicklung erfahren. Es ist daher dem Verfasser des vorliegenden Buches, der Wichtiges zur Theorie beigetragen hat, zu danken, daß er den riesig zugewachsenen Stoff in Form eines Lehrbuches vorlegt. Es soll eine kurze Inhaltsübersicht des ersten Bandes gegeben werden. Das erste Kapitel: Grundbegriffe der allgemeinen Topologie ist eine sehr glatte, wohlabgewogene Darstellung der modernen Begriffsbildungen, wie sie vor allem von *N. Bourbaki* der Theorie aufgeprägt wurden. Das Kapitel bringt die grundlegenden Tatsachen über topologische Räume, gerichtete Systeme und Filter, kompakte, metrische und uniforme Räume von *A. Weil* und die reellen Funktionen auf diesen Räumen. Das zweite Kapitel: Lineare Räume über beliebigen Körpern bringt außer den Grundlagen den Beweis des Satzes von *P. Erdős* und *S. Kaplansky* über die Dimension des dualen Raumes nach *W. Neumer*, die lineartopologischen, linear kompakten und lokal linear kompakten Räume, die Dualsysteme linearer Räume nach *J. Dieudonné* und *G. W. Mackey*, die Gleichungstheorie in diesen Räumen, die Auflösungstheorie von spalten- und zeilenfiniten Gleichungssystemen. Den Abschluß bilden die halbfiniten und Räume abzählbarer Stufe von *G. Köthe*. Im dritten Kapitel: Topologisch lineare Räume werden jetzt die Räume über den Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen betrachtet: (Normierte, Banach-lokalbeschränkte und metrisierbare Räume, Sätze von *D. H. Huers-D. G. Bourgin*, *S. Rolewicz* und *V. L. Klee*, die grundlegenden Sätze von *S. Banach* und *J. Schauder*, *S. Banach-H. Steinhaus*, der Graphensatz, konvexe Körper und Kegel und der Satz von *H. Hahn-S. Banach* sowohl in geometrischer, wie in analytischer Form). Das vierte Kapitel: Lokalkonvexe Räume stellt wohl das Kernstück des Buches dar. Es bringt eingehende und sorgfältige Darstellung der Eigenschaften der lokalkonvexen Hülle und des Kernes, den induktiven und projektiven Limes lokalkonvexer Räume, der Polarität und der verschiedenen Topologien auf diesen Räumen (schwache, starke, polare, *Mackeysche* Topologie), tonnelierte Räume und die Topologie der präkompakten Konvergenz, Bipolarensatz und die Sätze von *L. Alaoglu-N. Bourbaki*, *S. Banach-G. W. Mackey*, *G. W. Mackey*, *G. W. Mackey-R. F. Arens*, *A. Grothendieck* und *S. Banach-J. Dieudonné*. Das fünfte Kapitel: Topologisch-geometrische Eigenschaften der lokalkonvexen Räume setzt das Thema fort (Bidualität, reflexive, distinguirte, polarreflexive, uniformkonvexe Räume von *J. A. Clarkson*, Sätze von *V. Smulian-J. Kaplansky* (in der verallgemeinerten Gestalt von *J. Dieudonné* und *L. Schwartz*), Satz von *W. Eberlein* (nach *Grothendieck*), Sätze von *V. L. Klee* über konvexe Mengen, Satz von *M. Krein* (Beweise von *Grothendieck* und *V. Ptak*), Extrempunkte und -Strahlen konvexer Mengen, Satz von *M. Krein-D. Milman*, *R. Gateaux* — und *M. Fréchet*sches Differential. Das sechste und letzte Kapitel des vorliegenden ersten Bandes: Einige Klassen lokalkonvexer Räume bringt die tonnelierten, bornologischen (Satz von *G. H. Mackey-S. Ulan*), *Montel-* (F) und (DF)-Räume. (Satz von *A. Grothendieck* und *W. F. Donoghue* und *K. T. Smith*), vollkommene-, Stufen und gestufte Räume (Theorie von *G. Köthe* und *O. Toeplitz*). Eine Reihe von Gegenbeispielen beschließt den Band. Diese Inhaltsübersicht zeigt die Fülle des verarbeiteten Stoffes. Die Darstellung ist sehr klar, die Begriffe und Sätze

werden an Beispielen erläutert. So ist ein sehr lebendiges Werk entstanden, welches auf lange Zeit ein Standardwerk bleiben wird. *E. Hlawka, Wien*

Die Programmierung für elektronische Ziffernrechner. (Wirtschaftsmathematik und Unterricht: Heft 1.) Von *K. Hellmich*. Mit 13 Textabb., 48 S. Graz-Wien: Leykam, Pädagogischer Verlag. 1961. Brosch. S 49.—.

Diese Heftreihe soll die Personen, die sich im Beruf mit Wirtschaftsfragen befassen, in die Gedankengänge der Wirtschaftsmathematik einführen. Im ersten Heft werden programmgesteuerte Rechenmaschinen betrachtet. Es kann allerdings nur eine Einführung gegeben werden. Das Heft beschränkt sich auf geschichtlichen Überblick, auf mathematische und physikalische Grundlagen, auf die Angabe von einigen Ablaufdiagrammen und algorithmischen Rechenplänen zu Aufgaben der Wirtschaft und der Wissenschaft und auf die Angabe wichtiger Befehlsverschlüsselungen bei der Univac-Fac-Tronic und der IBM 650. Der Leser wird durch das Studium dieses Heftes nicht befähigt, selbständig Programme aufzustellen, aber er gewinnt ungefähre Eindrücke, wie Programme aussehen. *N. Hofreiter, Wien*

Digital Computers and Nuclear Reactor Calculations. Von *W. C. Sangren*. Mit 32 Textabb., XI, 208 S. New York-London: J. Wiley & Sons. 1960. Geb. \$ 8.50

Das Buch besteht aus zwei Teilen. Im ersten Abschnitt (Kap. 1–4) wird eine Einführung in die numerische Analysis und in die numerische Verfahrenstechnik für Rechenautomaten gegeben. Der zweite Abschnitt (Kap. 5–8) ist den Anwendungen in der Kernphysik gewidmet. Daher werden die Kernphysiker in erster Linie zu den interessierten Lesern gehören. Aus der numerischen Analysis werden die brauchbarsten Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme, algebraischer und transzendenter Gleichungen, gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen gebracht. Bevorzugt werden die iterativen Methoden, da sich diese in besonderer Weise für das Rechnen mit digitalen Rechenautomaten eignen. Diese haben grundsätzlich folgenden Aufbau: Eingabe, Speicher, Rechenwerk, Leitwerk und Ausgabe. Zur Programmierung im weiteren Sinne gehören: die mathematische Formulierung eines physikalischen oder technischen Problems, die Auswahl des numerischen Verfahrens, die Aufstellung des Strukturiagramms und der algorithmischen Darstellung. Zur Programmierung im engeren Sinne gehört die Übersetzung des Rechenprogramms in die individuelle Sprache der zur Verfügung stehenden Maschine. Das Buch vermittelt dem Leser grundlegende Kenntnisse, aber keine Fertigkeit in der Programmierung. Die letzten vier Kapitel bringen interessante Beispiele für den Gebrauch der Rechenautomaten in der Kernphysik. Die Kapitel tragen folgende Überschriften: A code for fission-product poisoning. — Diffusion and age-diffusion calculations. — The Boltzmann transport equation and the Monte Carlo methode. — Additional reactor calculations. *N. Hofreiter, Wien*

Advances in Computers. Band I. Herausgegeben von *F. L. Alt*. Mitherausgeber: *A. D. Booth* und *R. E. Maagher*. Mit 28 Textabb., X, 316 S. New York-London: Academic Press. 1960. Geb. \$ 10.—.

Neue Erkenntnisse werden zunächst in wissenschaftlichen Zeitschriften veröffentlicht und sind ob ihrer knappen Darstellungen nur relativ wenigen Fachgelehrten verständlich. Erst später folgen Monographien und Lehrbücher. Die

geplante Reihe: „Fortschritt in Rechenautomaten“ will eine Mittelstellung einnehmen. Die Autoren bedienen sich einer Darstellung, die für einen größeren Leserkreis geeignet ist. Die Aufsätze enthalten aktuelle Themen, die das Rechnen mit Rechenautomaten beinhalten oder Probleme behandeln, die den Einsatz von Rechenautomaten wünschenswert machen oder erfordern. Dies gilt z. B. für die Wettervorhersage oder die automatische Übersetzung von Sprachen. Das Buch enthält folgende 6 Abhandlungen:

- 1) „General-purpose programming for business applications“ von *C. A. Gotlieb*,
- 2) „Numerical weather prediction“ von *N. A. Phillips*,
- 3) „The present status of automatic translation of languages“ von *Y. Bar-Hillel*,
- 4) „Programming computers to play games“ von *A. L. Samuel*,
- 5) „Machine recognition of spoken words“ von *R. Fatehchand*,
- 6) „Binary Arithmetic“ von *G. W. Reitwiesner*. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die Kontinuumsmechanik. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften.) Von *W. Prager*. Mit 26 Textabb., 228 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1961. Geb. sfr. 32.50.

Die vorliegende Einführung war ursprünglich hauptsächlich für Studierende einer amerikanischen Universität bestimmt, welche mehrere Spezialvorlesungen über Kontinuumsmechanik zu hören hatten und wobei die Vortragenden gezwungen waren, in jeder Spezialvorlesung die allgemeinen Grundlagen der Theorie aufs neue zu entwickeln. Diskussionen mit anderen akademischen Lehrern zeigten jedoch den Bedarf einer solchen Einführung auch an anderen Universitäten der USA und der Schweiz. Das Buch beginnt erfreulich klar und einfach mit „Geometrischen Grundlagen“ (Vektor- und Tensorrechnung, Integralsätze, krummlinige Koordinaten). Daran schließen sich Ausführungen über den Spannungszustand und den „Bewegungszustand“ (Kinematik des Kontinuums). Nach einer Erörterung der Erhaltungssätze folgt die Theorie der idealen Flüssigkeiten. Hierauf folgt die Theorie der zähen Flüssigkeiten, wobei auch nicht-Newtonsche Flüssigkeiten (definiert durch den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Deformationsdyade) berücksichtigt werden. Es folgen weitere vier Kapitel, die in den üblichen deutschen Lehrbüchern der Kontinuumsmechanik in dieser Form nicht behandelt zu werden pflegen, dafür aber gerade deshalb besonderem Interesse begegnen dürften. In einem Kapitel VII wird das Verhalten zähplastischer (*Bingham*, 1922) und idealplastischer Stoffe (*v. Mises*, 1913), in einem Kapitel VIII die hypoelastischen Stoffe (*Jaumann*, 1911; *Truesdall*, 1955) samt der klassischen Elastizitätstheorie, in einem Kapitel IX die endlichen Verzerrungen und in einem abschließenden Kapitel X die elastischen und hyperelastischen Stoffe behandelt. Diese beiden letzten Kapitel sind vom Typus von Handbuchartikeln mit Weglassung mathematischer Detailableitungen. In einem Anhang finden sich 172 Übungsaufgaben (allerdings ohne die Lösungen). Das Buch zeichnet sich dank der konsequenten Verwendung der Tensorrechnung durch einen großartig geschlossenen Aufbau aus, der allerdings von dem studentischen Anfänger als unanschaulich und deshalb schwer verständlich empfunden werden dürfte, aber bei den Fachleuten helle Begeisterung auslösen dürfte. Auf Einzelheiten der Darstellung einzugehen verbietet der eng begrenzte Raum einer Rezension. Es sei nur darauf hingewiesen, daß die ausgedehnte angelsächsische Literatur der jüngsten Zeit insbesondere in den Kapiteln VI bis X vollauf berücksichtigt erscheint.

Th. Seixl, Wien

Nuclear Reactor Theory. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. XI. Von *G. Birkhoff* und *E. P. Wigner*. Mit 38 Textabb., V, 339 S. U. S. A.: American Mathematical Society. 1961.

Der vorliegende höchst aktuelle Band XI der Tagungsfortschritte in der angewandten Mathematik der amerikanischen mathematischen Gesellschaft enthält 19 Beiträge eines Kongresses über Reaktortheorie, der vom 23. bis 25. April 1959 in New York abgehalten wurde. Das Ziel dieser Vorträge war, die verschiedenen Problemstellungen der Reaktortheorie aufzuzeigen und sie auf eine möglichst strenge wissenschaftliche Basis zu stellen. Die beiden Herausgeber rufen die Mathematiker auf, es *Archimedes*, *Newton*, *Gauss*, *Fourier*, *Maxwell* und *Poincaré* gleichzutun und die sich darbietenden mathematischen Probleme streng in Angriff zu nehmen. Die mathematischen Probleme der Reaktortheorie werden insbesondere in dem Beitrag Nr. 5 von *E. Wigner* formuliert und in zwei Klassen geteilt: die erste Klasse betrifft die strenge Formulierung der Transporttheorie, worunter man die Berechnung des Neutronenflusses auf Grund statistischer Methoden versteht, die im wesentlichen bereits von *L. Boltzmann* in seiner kinetischen Gastheorie entwickelt wurden. Die zweite Klasse von Problemen beinhaltet die Entwicklung von Methoden zur tatsächlichen Lösung dieser Reaktorgleichungen. Hierbei spielt insbesondere die Umformung der Gleichungen in ein äquivalentes Variationsproblem eine entscheidende Rolle. Viele der in dem *Wignerschen* Bericht formulierten Probleme werden in den folgenden Beiträgen in allen Einzelheiten diskutiert und der derzeitige Stand aufgezeigt. Besonders interessant ist der Aufsatz Nr. 12 von *R. D. Richtmyer* über die Monte-Carlo-Methode in der Reaktortheorie, wo auch die historische Entwicklung ausführlich geschildert wird. Es erübrigt sich darauf hinzuweisen, daß der vorliegende Kongreßbericht für alle auf diesem Gebiet tätigen Forscher unentbehrlich ist

Th. Sestl, Wien

Czechoslovak Mathematical Journal

Redaktionsrat:

Jan Mařík, O. Boruvka, M. Fiedler, J. Hájek, J. Jakubík, V. Jarník,
M. Jiřina, M. Katětov, J. Klapka, Vl. Kořínek, K. Koutský, J. Kurzweil,
J. Nečas, J. Novák, Vl. Pták, L. Rieger, Št. Schwarz, A. Švec, J. Holubář.

Herausgeber:

Mathematisches Institut
der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften.

Diese Zeitschrift veröffentlicht wissenschaftliche Originalarbeiten aus dem Gebiet der Mathematik und Geometrie, der Algebra, Analysis, Funktionentheorie, Zahlentheorie, Topologie usw. Sie befaßt sich vornehmlich mit theoretischen Fragen und die Ergebnisse werden in englischer, russischer, deutscher oder französischer Sprache veröffentlicht.

Neben Originalarbeiten bringt die Zeitschrift auch vorläufige Berichte, kurze Mitteilungen, Nachrichten über internationale Ereignisse auf dem Gebiete der Mathematik, Buchrezensionen usw.

Jahresabonnement: \$ 12.80. £ 4, 7, 2. Dieser Betrag kann im gleichen Werte jeder anderen Währung beglichen werden.

Mit Ihrer Bestellung wenden Sie sich bitte an Ihren Buch- oder Zeitungshändler, oder direkt an unsere Adresse



Smečky 30

Praha - Tschechoslowakei

Electronic Computers

Fundamentals, Systems, and Applications

Edited by

Paul von Handel

Institute for Defense Analyses, Washington, D. C., USA

With the cooperation of

Hans W. Gschwind, Martin G. Jaenke, and Robert G. Tantzen

Air Force Missile Development Center, Holloman AFB., New Mexico, USA

(In englischer Sprache)

With 160 figures. VI, 235 pages. $6\frac{3}{4}'' \times 9\frac{1}{2}''$. 1961

Full cloth S 297.—, DM 47.20, sfr. 50.70, \$ 11.80

From the Preface

This book was prepared by distinguished experts in the field of computers for the non-expert who does not intend to become an expert but who wants to acquire a general understanding of the problems and solutions which he needs to effectively perform the work in his proper field.

So we address this book to the engineer and scientist, who want to know the performance of computers, as well as to the manager, who is mainly concerned with their economic aspect.

The technical development of computing machines is going on at a rapid rate. Any detailed description of computer components would therefore become obsolete within a few years. The general principles underlying their operation will probably remain unchanged for a longer time. Accordingly, this book puts main emphasis on principles and methods rather than on engineering details.

Contents

Preface. Introduction. — **Digital Computers.** By **Robert G. Tantzen.** Layout and Structure. Number Systems. Programming. Capabilities and Limitations. Bibliography. — **Analog Computers.** By **Martin G. Jaenke.** Basic Philosophy. Components of Analog Computers. The DC Analog Computer System. Operation of a DC Analog Computer. Conclusions and Outlook. Bibliography. — **Digital Differential Analyzers.** By **Hans W. Gschwind.** Description. Operation. Capabilities and Limitations. Bibliography. — **Computing Control Systems.** By **Martin G. Jaenke.** Introduction. Basic Principles of Control Engineering. Computers in Control Systems. Design Considerations. Conclusions. Bibliography. — Glossary of Computer Terms. Alphabetical Index.

Linear Programming in Industry

Theory and Applications. An Introduction. By **Sven Danö**, Assistant Professor of Economics, University of Copenhagen. With 6 figures. VIII, 120 pages. Gr.-8°. 1960.

Steif geheftet S 120.—, DM 20.—, sfr. 20.50, \$ 4.75

The book gives a very simple account of the mathematical theory of Linear Programming (with proofs of the basic theorems in an Appendix), describes in detail a large number of industrial applications, and explains the practical methods of numerical solution. Instructive exercises are given throughout the text. The book requires little mathematical proficiency from the reader without sacrificing rigour, and gets further by purely elementary mathematical tools than other existing texts in Linear Programming. Those who have read the book will be capable of detecting, formulating, and solving such linear planning problems as might occur within their respective fields.